

week9: Exotische Optionen im Black-Scholes Modell, Teil2 Die All-Time-High Option

Die All-Time-High Option zahlt den maximalen Preis des Underlyings aus, der während der Laufzeit erzielt wurde. Der Payoff ist also

$$H_{ATH}(\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}) := \max_{0 \leq t \leq T} S_t \quad (1)$$

und das ist sicherlich eine sehr attraktive Auszahlungsfunktion. Wenn wir nicht mehr bei Zeit 0, sondern bei Zeit $t \in [0, T]$ sind, dann wird der Preis dieser Option natürlich auch davon abhängen, wie gross der maximale Preis des Underlyings ist, der bisher schon erzielt wurde. Das heisst, wenn wir bei Zeit t sind, dann wird der Preis V_t nicht nur von dem aktuellen Underlyingpreis S_t abhängen, sondern auch von dem bis dahin realisierten Maximum,

$$M_t := \max_{0 \leq s \leq t} S_s \quad (2)$$

Im Gesamt-Skript FM I+II wird im Kapitel 11

<http://hsrm-mathematik.de/WS201516/master/option-pricing/Chapter11.pdf>

im Theorem 11.3 die folgende Formel bewiesen (wir sind hier im week9, machen wir ein Theorem 9.1):

Theorem 9.1: Let $\kappa = \frac{2r}{\sigma^2}$. Then the time- t price V_t of the all-time-high option (1) is given by

$$V_t = e^{-r\tau} \left\{ M_t N(d_1) + e^{r\tau} S_t N(d_{0,+}) + \frac{1}{\kappa} \left[e^{r\tau} S_t N(d_{0,+}) - S_t^{1-\kappa} M_t^\kappa N(d_{0,-}) \right] \right\} \quad (3)$$

Here $M_t := \max_{0 \leq s \leq t} S_s$ is the current realized maximum up to time t , $\tau = T - t$ is the remaining time to maturity and the d 's are given by

$$d_{0,\pm} := \frac{\log\left[\frac{S_t}{M_t}\right] + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \pm \frac{r}{\sigma}\sqrt{\tau} \quad (4)$$

$$d_1 := \frac{\log\left[\frac{M_t}{S_t}\right] + (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad (5)$$

Proof: Das ist eine etwas längere Rechnung. Konzeptionell ist das aber nicht wesentlich anders als die Rechnung, die wir schon bei dem Down-and-Out Call gemacht haben, deswegen lassen wir das hier mal weg. ■

Anstatt uns die doch etwas aufwändige und technische Rechnung anzuschauen, wollen wir versuchen, die Formel (3) etwas zu plausibilisieren. Schauen wir uns vielleicht zunächst einmal

den Limes $\tau \rightarrow 0$ an. Also, wir sind nahe bei Laufzeitende, $t \rightarrow T$. Dann muss der Preis $V_{t=T}$ gleich dem Payoff sein, und der Payoff ist das realisierte Maximum $M_{t=T}$, also es sollte gelten:

$$\lim_{t \rightarrow T} V_t = M_T \quad (6)$$

Schauen wir uns die d 's an: Der Quotient S_T/M_T wird typischerweise kleiner als 1 sein, da das Maximum irgendwann früher realisiert wurde. Das $\tau = T - t$ ist ja die Restlaufzeit, also die geht gegen 0. Aus den Gleichungen (4) und (5) folgt dann also

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T} d_{0,\pm} &= -\infty \\ \lim_{t \rightarrow T} d_1 &= +\infty \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} N(-\infty) &= 0 \\ N(+\infty) &= 1 \end{aligned}$$

bekommen wir dann also mit der Pricing-Formel (3):

$$\lim_{t \rightarrow T} V_t = e^{-r\tau} \left\{ M_T \cdot 1 + e^{r\tau} S_T \cdot 0 + \frac{1}{\kappa} \left[e^{r\tau} S_T \cdot 0 - S_T^{1-\kappa} M_T^\kappa \cdot 0 \right] \right\} = M_T \quad (7)$$

das macht also schon mal Sinn.

Als nächstes wollen wir den Limes Zinsen $r \rightarrow 0$ betrachten. Definieren wir dazu ein neues d , und zwar

$$d := \frac{\log \left[\frac{M_t}{S_t} \right] + \frac{\sigma^2}{2} \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \quad (8)$$

so dass also

$$\lim_{r \rightarrow 0} d_1 = d \quad (9)$$

gilt. Weiterhin haben wir

$$\begin{aligned} d_0 &:= \lim_{r \rightarrow 0} d_{0,\pm} = \frac{\log \left[\frac{S_t}{M_t} \right] + \frac{\sigma^2}{2} \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \\ &= \frac{-\log \left[\frac{M_t}{S_t} \right] + \frac{\sigma^2}{2} \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \\ &= -\frac{\log \left[\frac{M_t}{S_t} \right] - \frac{\sigma^2}{2} \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \\ &= -\frac{\log \left[\frac{M_t}{S_t} \right] + \frac{\sigma^2}{2} \tau - \sigma^2 \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \\ &= -\frac{\log \left[\frac{M_t}{S_t} \right] + \frac{\sigma^2}{2} \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} + \sigma \sqrt{\tau} \\ &= -d + \sigma \sqrt{\tau} \end{aligned} \quad (10)$$

Schreiben wir die Formel (3) eben nochmal hin,

$$V_t = e^{-r\tau} \left\{ M_t N(d_1) + e^{r\tau} S_t N(d_{0,+}) + \frac{1}{\kappa} \left[e^{r\tau} S_t N(d_{0,+}) - S_t^{1-\kappa} M_t^\kappa N(d_{0,-}) \right] \right\}$$

Der Vorfaktor, das $e^{-r\tau}$ geht natürlich gegen 1, und in den ersten beiden Termen können wir auch einfach das r auf 0 setzen, um den Limes zu bekommen. Das geht aber nicht so einfach bei den letzten beiden Termen, die eckige Klammer wird 0 und im Nenner, das $\kappa = 2r/\sigma^2 = r/(\sigma^2/2)$ wird auch 0, also da haben wir dann 0/0 und müssen ein bisschen schauen, was das ist. Wir schreiben also:

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_t = M_t N(d) + S_t N(d_0) + \text{Term}_3 \quad (11)$$

mit

$$\begin{aligned} \text{Term}_3 &= \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{1}{\kappa} \left[e^{r\tau} S_t N(d_{0,+}) - S_t^{1-\kappa} M_t^\kappa N(d_{0,-}) \right] \\ &= \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{1}{\kappa} \left[e^{\kappa \frac{\sigma^2 \tau}{2}} S_t N\left(d_0 + \frac{r}{\sigma} \sqrt{\tau}\right) - S_t^{1-\kappa} M_t^\kappa N\left(d_0 - \frac{r}{\sigma} \sqrt{\tau}\right) \right] \\ &= \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{1}{\kappa} \left[e^{\kappa \frac{\sigma^2 \tau}{2}} S_t N\left(d_0 + \kappa \frac{\sigma \sqrt{\tau}}{2}\right) - S_t^{1-\kappa} M_t^\kappa N\left(d_0 - \kappa \frac{\sigma \sqrt{\tau}}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

Wir schreiben jetzt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\kappa} \left[e^{\kappa \frac{\sigma^2 \tau}{2}} S_t N\left(d_0 + \kappa \frac{\sigma \sqrt{\tau}}{2}\right) - S_t^{1-\kappa} M_t^\kappa N\left(d_0 - \kappa \frac{\sigma \sqrt{\tau}}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\kappa} \left[\left(e^{\kappa \frac{\sigma^2 \tau}{2}} - 1 \right) S_t N\left(d_0 + \kappa \frac{\sigma \sqrt{\tau}}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\kappa} \left[S_t \left\{ N\left(d_0 + \kappa \frac{\sigma \sqrt{\tau}}{2}\right) - N\left(d_0 - \kappa \frac{\sigma \sqrt{\tau}}{2}\right) \right\} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\kappa} \left[\left(S_t - S_t^{1-\kappa} M_t^\kappa \right) N\left(d_0 - \kappa \frac{\sigma \sqrt{\tau}}{2}\right) \right] \right] \\ &\xrightarrow{\kappa \rightarrow 0} \frac{\sigma^2 \tau}{2} S_t N(d_0) \\ &\quad + S_t N'(d_0) \sigma \sqrt{\tau} \\ &\quad + S_t \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{1}{\kappa} \left(1 - e^{\kappa \log[M_t/S_t]} \right) N(d_0) \\ &= \frac{\sigma^2 \tau}{2} S_t N(d_0) + S_t N'(d_0) \sigma \sqrt{\tau} - S_t \log\left[\frac{M_t}{S_t}\right] N(d_0) \end{aligned}$$

Also,

$$\text{Term}_3 = \frac{\sigma^2 \tau}{2} S_t N(d_0) + S_t N'(d_0) \sigma \sqrt{\tau} - S_t \log\left[\frac{M_t}{S_t}\right] N(d_0) \quad (13)$$

Wir setzen (13) in (11) ein und erhalten die folgende Formel:

Folgerung 9.2: Im Limes Zinsen $r = 0$ ist der Zeit- t -Preis V_t einer All-Time-High Option mit Laufzeit T gegeben durch

$$V_t = M_t N(d) + S_t \left\{ N(d_0) \left(1 + \frac{\sigma^2 \tau}{2} - \log\left[\frac{M_t}{S_t}\right] \right) + N'(d_0) \sigma \sqrt{\tau} \right\} \quad (14)$$

mit

$$d = \frac{\log\left[\frac{M_t}{S_t}\right] + \frac{\sigma^2 \tau}{2}}{\sigma \sqrt{\tau}} \quad (15)$$

$$d_0 = \frac{\log\left[\frac{S_t}{M_t}\right] + \frac{\sigma^2 \tau}{2}}{\sigma \sqrt{\tau}} = -d + \sigma \sqrt{\tau} \quad (16)$$

Insbesondere ist der Preis V_0 zur Startzeit $t = 0$ gegeben durch

$$V_0 = S_0 \left\{ N(\sigma\sqrt{T}/2) \left(2 + \frac{\sigma^2 T}{2} \right) + N'(\sigma\sqrt{T}/2) \sigma\sqrt{T} \right\} \quad (17)$$

Checken wir vielleicht noch den Grenzfall $\sigma \rightarrow 0$. Da die Zinsen auch 0 sind, ist in dem Fall $S_t = S_0$ für alle t so dass also auch das Maximum $M_t = S_0$ ist. Damit ist $\log[\frac{M_t}{S_t}] = \log 1 = 0$ und beide d 's gehen nach 0,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} d = \lim_{\sigma \rightarrow 0} d_0 = 0 \quad (18)$$

Damit liefert die Formel (14)

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} V_t = S_0 N(0) + S_0 \left\{ N(0) \left(1 + 0 - \log 1 \right) + N'(0) 0 \sqrt{\tau} \right\} = S_0 ,$$

das macht also auch alles Sinn. Erinnern Sie sich daran, dass $N(0) = 1/2$ ist. Wir werden die Formel (3) dann noch mit einer Monte-Carlo Simulation verifizieren.

Excel/VBA-Demo: Überprüfen Sie die analytische Pricing-Formel (3) für eine All-Time-High Option aus dem Theorem 9.1 mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation.