

**week8: Exotische Optionen Teil1:
Barrier-Optionen im Black-Scholes Modell**

Wir können jetzt das Theorem 7.1 aus dem week7b benutzen, um eine analytische Formel für den Preis einer Down-and-Out Barrier Call-Option herzuleiten. Es gilt das folgende

Theorem 8.1: Consider the barrier option with payoff

$$H(S_T) = \max\{S_T - K, 0\} \chi\left(\min_{0 \leq t \leq T} S_t > B\right), \quad K \geq B > 0 \quad (1)$$

a ‘down-and-out’ Barrier-Call with strike K , barrier B and maturity T . Let the asset price dynamics be given by a Black-Scholes model and let

$$V_{\text{Call},K}(S, t) = S_t N(+d_+) - K e^{-r(T-t)} N(+d_-)$$

with

$$d_{\pm} := \frac{\log \frac{S_t}{K} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

be the time- t Black-Scholes price of the call $\max\{S_T - K, 0\}$ given by the standard Black-Scholes formulae (das waren die Formeln (5-7) auf dem Ü-Blatt 4). Let $\kappa := \frac{2r}{\sigma^2}$. Then the time- t price of the barrier option (1) is given by

$$V_{\text{Barrier}}(S_t, t) = V_{\text{Call},K}(S_t, t) - \left(\frac{S_t}{B}\right)^{1-\kappa} V_{\text{Call},K}\left(\frac{B^2}{S_t}, t\right) \quad (2)$$

More precisely, the time- t price is given by (2) only if $\min_{0 \leq i \leq t} S_i > B$, otherwise it is 0, the option is dead.

Proof: Wir setzen wieder

$$c := \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$$

Im week7a.pdf hatten wir bereits in Gleichung (8) die folgende Darstellung für den Preis des Barrier-Calls hergeleitet:

$$V_{\text{Barrier}}(S_0, t=0) = e^{-rT} \int H(S_0 e^{\sigma y_T}, S_0 e^{\sigma \min_{0 \leq t \leq T} \{y_t\}}) e^{cy_T - \frac{c^2}{2}T} dW(\{y_t\}_{0 < t \leq T}) \quad (3)$$

Wir hatten dann mit einem formalen Trick, mit dieser Zerlegung der 1, das war die Gleichung (11) aus dem week7a.pdf, den Erwartungswert bezüglich des Wiener-Masses in diese Funktion

$$\rho_{F,G}(a,b) = \rho_{y_T, \min_{0 \leq t \leq T} \{y_t\}}(a,b)$$

verschoben. Das hatten wir in Gleichung (13) gemacht. Und zwar war das $I(a,b)$ in Gleichung (13) gegeben durch den Integranden in Gleichung (3) hier weiter oben (das a war vorher ein $F(\{y_t\}) := y_T$ und das b war vorher ein $G(\{y_t\}) := \min_{0 \leq t \leq T} \{y_t\}$)

$$I(a,b) := H(S_0 e^{\sigma a}, S_0 e^{\sigma b}) e^{ca - \frac{c^2}{2}T}$$

Als Resultat bekommen wir dann also, mit $\rho_{F,G} = \rho_{y_T, \min y_t}$,

$$\begin{aligned} V_{\text{Barrier}}(S_0, t=0) &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}^2} I(a,b) \rho_{F,G}(a,b) da db \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}^2} H(S_0 e^{\sigma a}, S_0 e^{\sigma b}) e^{ca - \frac{c^2}{2}T} \rho_{y_T, \min_{0 \leq t \leq T} \{y_t\}}(a,b) da db \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}^2} (S_0 e^{\sigma a} - K)_+ \chi(S_0 e^{\sigma b} > B) e^{ca - \frac{c^2}{2}T} \rho_{y_T, \min_{0 \leq t \leq T} \{y_t\}}(a,b) da db \end{aligned} \quad (4)$$

wobei wir die Notation

$$(S_0 e^{\sigma a} - K)_+ := \max\{S_0 e^{\sigma a} - K, 0\}$$

benutzen wollen. Und für das $\rho_{y_T, \min_{0 \leq t \leq T} \{y_t\}}(a,b)$, da war der Erwartungswert bezüglich des Wiener-Masses drin, hatten wir schliesslich in Theorem 7.1 eine geschlossene Formel hergeleitet. Das heisst, zunächst hatten wir die Formel

$$P_W\left(y_T \in [a, a+da), \max_{0 \leq t \leq T} y_t \in [b, b+db)\right) = \rho_{y_T, \max_{0 \leq t \leq T} \{y_t\}}(a,b) da db. \quad (5)$$

mit

$$\rho_{y_T, \max_{0 \leq t \leq T} \{y_t\}}(a,b) = -\frac{2}{T} \varphi'\left(\frac{2b-a}{\sqrt{T}}\right) \chi(a < b). \quad (6)$$

bewiesen. Nun gilt aber, da die Brownschen Pfade $\{y_t\}$ und $\{-y_t\}$ dieselbe Wahrscheinlichkeit haben,

$$\begin{aligned} &P_W\left(y_T \in [a, a+da), \max_{0 \leq t \leq T} y_t \in [b, b+db)\right) \\ &= P_W\left(-y_T \in [a, a+da), \max_{0 \leq t \leq T} \{-y_t\} \in [b, b+db)\right) \\ &= P_W\left(y_T \in (-a-da, -a], -\min_{0 \leq t \leq T} y_t \in [b, b+db)\right) \\ &= P_W\left(y_T \in (-a-da, -a], \min_{0 \leq t \leq T} y_t \in (-b-db, -b]\right) \\ &= \rho_{y_T, \min_{0 \leq t \leq T} \{y_t\}}(-a, -b) da db. \end{aligned} \quad (7)$$

also bekommen wir die Gleichung

$$\rho_{y_T, \min_{0 \leq t \leq T} \{y_t\}}(-a, -b) = \rho_{y_T, \max_{0 \leq t \leq T} \{y_t\}}(a, b) = -\frac{2}{T} \varphi'\left(\frac{2b-a}{\sqrt{T}}\right) \chi(a < b)$$

oder

$$\rho_{y_T, \min_{0 \leq t \leq T} \{y_t\}}(a, b) = -\frac{2}{T} \varphi'\left(\frac{a-2b}{\sqrt{T}}\right) \chi(a > b) \quad (8)$$

Gleichung (8) können wir jetzt in Gleichung (4) einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} V_{\text{Barrier}}(S_0, t = 0) &= \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}^2} (S_0 e^{\sigma a} - K)_+ \chi(S_0 e^{\sigma b} > B) e^{ca - \frac{c^2}{2}T} \rho_{y_T, \min_{0 \leq t \leq T} \{y_t\}}(a, b) da db \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}^2} (S_0 e^{\sigma a} - K)_+ \chi(S_0 e^{\sigma b} > B) e^{ca - \frac{c^2}{2}T} \left(-\frac{2}{T}\right) \varphi'\left(\frac{a-2b}{\sqrt{T}}\right) \chi(a > b) da db \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} da (S_0 e^{\sigma a} - K)_+ e^{ca - \frac{c^2}{2}T} \int_{\mathbb{R}} db \chi\left(a > b > -\frac{1}{\sigma} \log\left(\frac{S_0}{B}\right)\right) \left(-\frac{2}{T}\right) \varphi'\left(\frac{a-2b}{\sqrt{T}}\right) \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} da (S_0 e^{\sigma a} - K)_+ e^{ca - \frac{c^2}{2}T} \chi\left(a > -\frac{1}{\sigma} \log\left(\frac{S_0}{B}\right)\right) \frac{1}{\sqrt{T}} \varphi\left(\frac{a-2b}{\sqrt{T}}\right) \Big|_{-\frac{1}{\sigma} \log\left(\frac{S_0}{B}\right)}^a \quad (9) \end{aligned}$$

In the last equation (9) we used that $K \geq B$ since otherwise a may be less than $\frac{1}{\sigma} \log \frac{B}{S_0}$. We obtain

$$\begin{aligned} V_{\text{Barrier}}(S_0, t = 0) &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} da (S_0 e^{\sigma a} - K)_+ e^{ca - \frac{c^2}{2}T} \frac{1}{\sqrt{T}} \left[\varphi\left(-\frac{a}{\sqrt{T}}\right) - \varphi\left(\frac{a + \frac{2}{\sigma} \log\left(\frac{S_0}{B}\right)}{\sqrt{T}}\right) \right] \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} da (S_0 e^{\sigma a} - K)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(a-cT)^2}{2T}} \\ &\quad - e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} da (S_0 e^{\sigma a} - K)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{\left(a + \frac{2}{\sigma} \log\left(\frac{S_0}{B}\right)\right)^2}{2T}} e^{ca - \frac{c^2}{2}T} \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} da (S_0 e^{\sigma a + \sigma cT} - K)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{a^2}{2T}} \\ &\quad - e^{-rT} \left(\frac{S_0}{B}\right)^{-\frac{2c}{\sigma}} \int_{\mathbb{R}} da (S_0 e^{\sigma a - 2 \log\left(\frac{S_0}{B}\right)} - K)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{a^2}{2T}} e^{ca - \frac{c^2}{2}T} \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} da (S_0 e^{\sigma a + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{a^2}{2T}} \\ &\quad - e^{-rT} \left(\frac{S_0}{B}\right)^{-(\kappa-1)} \int_{\mathbb{R}} da \left(\frac{B^2}{S_0} e^{\sigma a} - K\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(a-cT)^2}{2T}} \\ &= V_{\text{Call}}(S_0, 0) - \left(\frac{S_0}{B}\right)^{-(\kappa-1)} V_{\text{Call}}\left(\frac{B^2}{S_0}, 0\right) \quad (10) \end{aligned}$$

This proves the theorem for $t = 0$. For general $t \in [0, T]$, the result is obtained by a similar calculation with T substituted by time to maturity $\tau := T - t$. ■

Excel/VBA-Demo: Überprüfen Sie die analytische Pricing-Formel für einen Down-and-Out Barrier-Call aus dem Theorem 8.1 mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation.