

week7a: Probabilities Involving the Minimum and the Maximum of a Brownian Motion, Teil1

Das nächste grössere Ziel wäre jetzt die analytische Berechnung von Preisen von Barrier-Optionen und anderen pfadabhängigen Optionen im Black-Scholes Modell. Die Auszahlung von Barrier-Optionen hängt davon ab, ob während der Laufzeit der Option, also nicht erst am Ende, eine gewisse Preis-Barriere über- oder unterschritten wurde. Ganz konkret, die Auszahlungsfunktion eines so genannten Down-and-Out Calls mit Strike oder Ausübungspreis K und Barriere B ist gegeben durch

$$H_{\text{Down-and-Out}}(\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}) := \max[S_T - K, 0] \times \chi\left(\min_{t \in [0, T]} S_t \geq B\right)$$

wobei die Indikator-Funktion $\chi(\cdots)$ wie üblich definiert ist durch

$$\chi(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls die Aussage A wahr ist,} \\ 0 & \text{falls die Aussage A falsch ist.} \end{cases}$$

Wenn etwa $S_0 = 100$ ist, wären typische Werte für K und B etwa $K = 100$ und $B = 80$ oder für kurze Laufzeiten vielleicht $K = B = 90$. Solange dann der Underlyingpreis S_t grösser als 80 ist, ist das also ein ganz normaler Call, aber sobald der Underlyingpreis S_t für ein beliebiges $t \in [0, T]$ unter 80 fällt, ist die Option ‘tot’ und zahlt nichts mehr aus, auch wenn am Ende das S_T etwa wieder bei 120 steht.

Es ist sofort klar, dass hier Wahrscheinlichkeiten für das Maximum und das Minimum von S_t relevant sind, und, da wir hier ja das Black-Scholes Modell

$$S_t = S_0 e^{\sigma x_t + (\mu - \sigma^2/2)t}$$

für den Preisprozess zu Grunde legen in dem ja die Brownsche Bewegung x_t drin vorkommt, sind hier also Wahrscheinlichkeiten für das Maximum und das Minimum einer Brownschen Bewegung relevant.

Probabilities involving the minimum or maximum of a Brownian motion show up in the valuation of barrier and lookback options. These are european options whose payoff H depends on S_T , the stock price at maturity T , and on $M_T := \max_{0 \leq t \leq T} S_t$ or $m_T := \min_{0 \leq t \leq T} S_t$,

$$H = H\left(S_T, \min_{0 \leq t \leq T} S_t\right) \tag{1}$$

Thus these options depend on the particular path which leads to S_T , but only in a weak sense. For the Binomial model and the Black-Scholes model there are explicit pricing formulae. In this and the next chapter we derive these formulae for the Black-Scholes model. The

corresponding results in the Binomial model can be found, for example, in *Föllmer, Schied: Stochastic Finance in Discrete Time*.

The basic pricing formula for path dependent or path independent options in the Black-Scholes model is

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E} \left[H(S_T, \min_{0 \leq t \leq T} S_t) \right] \quad (2)$$

where $\mathbb{E}[\cdot]$ denotes the expectation with respect to the standard Wiener measure and $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$ is the risk neutral price process in the Black-Scholes model. That is,

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dx_t \quad (3)$$

with x_t a Brownian motion or explicitly

$$S_t = S_0 e^{\sigma x_t + (r - \sigma^2/2)t} \quad (4)$$

We can write

$$\min_{0 \leq t \leq T} S_t = S_0 e^{\sigma \min_{0 \leq t \leq T} \{x_t + (\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})t\}} \quad (5)$$

Thus, we can consider H as a function of x_T and $\min_{0 \leq t \leq T} \{x_t + (\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})t\}$. We first make a substitution of variables to eliminate the $(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})t$ term in the minimum. There is the following

Lemma 7.1 (Girsanov): Let $dW(\{x_t\}_{0 < t \leq T})$ be the Wiener measure and make the substitution of variables $y_t = x_t + ct$. Then

$$dW(\{y_t\}_{0 < t \leq T}) = dW(\{x_t + ct\}_{0 < t \leq T}) = e^{-cx_T - \frac{c^2}{2}T} dW(\{x_t\}_{0 < t \leq T}) \quad (6)$$

Proof: Let $t_k = k\Delta t$ and $N_T = T/\Delta t$. Then

$$\begin{aligned} dW(\{y_t\}_{0 < t \leq T}) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \prod_{k=1}^{N_T} p_{\Delta t}(y_{t_{k-1}}, y_{t_k}) dy_{t_k} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \prod_{k=1}^{N_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\frac{(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})^2}{2\Delta t}} dy_{t_k} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \prod_{k=1}^{N_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\frac{[x_{t_k} - x_{t_{k-1}} + c(t_k - t_{k-1})]^2}{2\Delta t}} dx_{t_k} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \prod_{k=1}^{N_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\frac{(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})^2}{2\Delta t}} e^{-(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})c - \frac{c^2}{2}\Delta t} dx_{t_k} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \prod_{k=1}^{N_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\frac{(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})^2}{2\Delta t}} dx_{t_k} e^{-\sum_{k=1}^{N_T} (x_{t_k} - x_{t_{k-1}})c - \frac{c^2}{2}N_T\Delta t} \\ &= dW(\{x_t\}_{0 < t \leq T}) e^{-(x_T - x_0)c - \frac{c^2}{2}T} \\ &= e^{-cx_T - \frac{c^2}{2}T} dW(\{x_t\}_{0 < t \leq T}) \end{aligned} \quad (7)$$

which proves the lemma. ■

Using the above lemma with $c = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$, the price V_0 in (2) can be written as

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-rT} \int H(S_0 e^{\sigma(x_T + cT)}, S_0 e^{\sigma \min_{0 \leq t \leq T} \{x_t + ct\}}) dW(\{x_t\}_{0 < t \leq T}) \\ &= e^{-rT} \int H(S_0 e^{\sigma y_T}, S_0 e^{\sigma \min_{0 \leq t \leq T} \{y_t\}}) e^{cx_T + \frac{c^2}{2}T} dW(\{y_t\}_{0 < t \leq T}) \\ &= e^{-rT} \int H(S_0 e^{\sigma y_T}, S_0 e^{\sigma \min_{0 \leq t \leq T} \{y_t\}}) e^{cy_T - \frac{c^2}{2}T} dW(\{y_t\}_{0 < t \leq T}) \end{aligned} \quad (8)$$

Thus, we have to compute an expectation value which depends on

$$F(\{y_t\}) := y_T \quad (9)$$

$$G(\{y_t\}) := \min_{0 \leq t \leq T} \{y_t\} \quad (10)$$

Die nächste Rechnung sind nur 5 Zeilen, und es wird eigentlich kaum was gerechnet, sondern nur ein bisschen umgeschrieben, aber trotzdem ist das eine konzeptionell ziemlich wichtige Sache, weil der Erwartungswert bezüglich des Wiener-Masses, im Limes ein unendlich-dimensionales Integral, am Ende in ein 2-dimensionales Integral umgeschrieben wurde.

Die Integrale, die in dem Wiener-Mass ja implizit enthalten sind, wurden hier aber noch nicht wirklich berechnet, sondern sie wurden nur in die Funktion $\rho_{F,G}(a, b)$ in (13) und (14) weiter unten verschoben. Das heisst, das eigentliche Problem wird dann darin bestehen, diese Funktion $\rho_{F,G}(a, b)$ zu berechnen, und das passiert dann in dem finalen Theorem 7.1 in diesem Kapitel. Das $\chi(\dots)$ im folgenden ist wieder die Indikator-Funktion.

Let I be the integrand in (8), $I = H(\dots) e^{cy_T - \frac{c^2}{2}T} = I(F, G)$. For real valued F , let

$$1 = \sum_a \chi\left(F \in [a, a + \Delta a)\right) \quad (11)$$

be a partition of the real axis.

Hier gibt es jetzt typischerweise immer ein Bild an der Tafel, also das meint folgendes: die a 's sind gegeben durch

$$a = a_i = i \Delta a$$

und Summe über a meint dann also

$$\sum_a \dots = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \dots$$

so dass, ganz egal welchen Wert etwa eine reelle Zahl F hat, dieses F dann in irgendeinem Intervall

$$[i \Delta a, (i + 1) \Delta a]$$

drin sein muss. Genau für dieses Intervall wird dann das $\chi(\dots)$ in (11) eine 1, und für alle

anderen i 's oder a 's ist das eine 0. Dann können wir den Erwartungswert in (8), die y_t tun wir wieder in x_t umbenennen, also nur Notation, keine Substitution,

$$\mathbb{E}\left[I(F(\{x_t\}), G(\{x_t\}))\right] := \int H(S_0 e^{\sigma x_T}, S_0 e^{\sigma \min_{0 \leq t \leq T} \{x_t\}}) e^{cx_T - \frac{c^2}{2}T} dW(\{x_t\}_{0 \leq t \leq T}) \quad (12)$$

und den Discount-Faktor e^{-rT} nehmen wir dann später wieder mit dazu, auch folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[I(F(\{x_t\}), G(\{x_t\}))\right] \\ &= \lim_{\substack{\Delta a \rightarrow 0 \\ \Delta b \rightarrow 0}} \sum_{a,b} \mathbb{E}\left[I(F(\{x_t\}), G(\{x_t\})) \chi(F \in [a, a + \Delta a)) \chi(G \in [b, b + \Delta b))\right] \\ &= \lim_{\substack{\Delta a \rightarrow 0 \\ \Delta b \rightarrow 0}} \sum_{a,b} \mathbb{E}\left[I(a, b) \chi(F \in [a, a + \Delta a)) \chi(G \in [b, b + \Delta b))\right] \\ &= \lim_{\substack{\Delta a \rightarrow 0 \\ \Delta b \rightarrow 0}} \sum_{a,b} I(a, b) \mathbb{E}\left[\chi(F \in [a, a + \Delta a)) \chi(G \in [b, b + \Delta b))\right] \\ &= \lim_{\substack{\Delta a \rightarrow 0 \\ \Delta b \rightarrow 0}} \sum_{a,b} I(a, b) \text{Prob}\left[F \in [a, a + \Delta a), G \in [b, b + \Delta b)\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} I(a, b) \rho_{F,G}(a, b) da db \end{aligned} \quad (13)$$

where we introduced the joint distribution

$$\text{Prob}\left[F \in [a, a + da), G \in [b, b + db)\right] = \rho_{F,G}(a, b) da db \quad (14)$$

For $F(\{x_t\}) = x_T$ and $G(\{x_t\}) = \min_{0 \leq t \leq T} \{x_t\}$, the joint distribution can be calculated explicitly. This is a consequence of the reflection principle which is formulated in the next lemma. For the statement, we need the definition of a stopping time. We do this in the next lecture.