

week5: Beispiele zu Monte Carlo

Wir wollen noch das Beispiel 1 aus dem week4a.pdf und ein weiteres Beispiel zur Monte Carlo Integration konkret berechnen.

Beispiel 1) Das Volumen τ_n der n -dimensionalen Einheitskugel lässt sich analytisch berechnen. Man findet:

$$\tau_n := \int_{\mathbb{R}^n} \chi(\|x\| \leq 1) d^n x = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \quad (1)$$

wobei für ganzzahliges m die Formel $\Gamma(m+1) = m!$ gilt. Überprüfen Sie die Formel (1) mit einer Monte Carlo Simulation für, sagen wir,

$$n \in \{2, 4, 6, 8\}$$

indem Sie auf dem Würfel $[-1, 1]^n$ gleichverteilte Zufallszahlen benutzen.

Lösung 1) Wir schreiben

$$\begin{aligned} \tau_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi(\|x\| \leq 1) d^n x \\ &= \int_{[-1,1]^n} \chi(\|x\| \leq 1) d^n x \\ &= 2^n \int_{\mathbb{R}^n} \chi(\|x\| \leq 1) \frac{\chi_{[-1,1]^n}(x)}{2^n} d^n x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F(x) p(x) d^n x \end{aligned}$$

mit dem Integranden

$$F(x) := 2^n \chi(\|x\| \leq 1) \quad (2)$$

und der W'keitsdichte

$$p(x) := \frac{\chi_{[-1,1]^n}(x)}{2^n} \quad (3)$$

Sind also

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) \in [-1, 1]^n \\ &\vdots \\ x^{(N)} &= (x_1^{(N)}, \dots, x_n^{(N)}) \in [-1, 1]^n \end{aligned}$$

N simulierte Zufallsvektoren mit auf dem Intervall $[-1, 1]$ gleichverteilten Zufallszahlen $x_j^{(i)}$, dann haben wir die folgende Monte Carlo Approximation für das τ_n :

$$\tau_n \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(x^{(i)}) \quad (4)$$

mit dem F gegeben durch (2).

Implementieren wir das jetzt konkret in Excel/VBA → Start Excel

Beispiel 2) Gegeben sei das Integral

$$I := \int_{-1}^2 e^{-x^2} dx$$

- a) Berechnen Sie den numerischen Wert von I mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation, indem Sie normalverteilte (aber nicht notwendig standard-normalverteilte) Zufallszahlen verwenden. Mit den Notationen und Definitionen von dem **week4a.pdf**, was genau ist F und was ist die Wahrscheinlichkeitsdichte p ?
- b) Berechnen Sie den numerischen Wert von I mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation, indem Sie uniforme oder gleichverteilte (aber nicht notwendig auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilte) Zufallszahlen benutzen. Was wäre in diesem Fall das F und die Wahrscheinlichkeitsdichte p ?

Ihre Resultate aus (a) und (b) sollten natürlich, bis auf random noise, übereinstimmen, also achten Sie auf eventuelle Vorfaktoren wie $1/\sqrt{\pi}$ oder $1/3$ (wo kommen die her?). Wenn Sie Ihr Ergebnis gegen eine exakte Formel gegenchecken wollen, könnten Sie auch noch versuchen, das I mit Hilfe der Funktion

$$N(x) := \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$$

auszudrücken. Wie bekommen Sie das $N(x)$ in Excel/VBA?