week4b: Berechnung von Optionspreisen mit der Monte Carlo Methode, Teil 2

Die standard Pricing-Formel für eine pfadunabhängige oder auch für eine pfadabhängige Option mit Auszahlung

$$H = H\bigl(\{S_t\}_{0\leq t\leq T}\bigr) \tag{1}$$

im Black-Scholes Modell lautet:

$$V_0 \;=\; e^{-rT}\,\mathsf{E}\bigl[\,H(\,\{S_t\}\,)\,\bigr] \tag{2}$$

Dabei ist S_t der risikoneutrale Preisprozess im Black-Scholes Modell, gegeben durch

$$S_t \;=\; S_0\,e^{\sigma x_t\,+\,(r-\sigma^2/2)t} \tag{3}$$

oder äquivalent, gegeben durch die SDE

$$dS_t/S_t \;=\; r\,dt \;+\; \sigma\,dx_t \tag{4}$$

In diskreter Zeit $t = t_k = k\Delta t$ ist Gleichung (4) gegeben durch

$$\begin{aligned} \tfrac{S_{t_k}-S_{t_{k-1}}}{S_{t_{k-1}}} \;&=\; r\,\Delta t \;+\; \sigma\sqrt{\Delta t}\;\phi_k \\ \Leftrightarrow \qquad S_{t_k} \;&=\; S_{t_{k-1}}\bigl(\,1 \;+\; r\,\Delta t \;+\; \sigma\sqrt{\Delta t}\;\phi_k\,\bigr) \end{aligned}$$

und der Erwartungswert in (2), das ist der Erwartungswert bezüglich des standard Wiener-Masses, liest sich dann folgendermassen. Ist $T = n\Delta t$, dann ist das $\mathsf{E}[\,\cdot\,]$ gegeben durch ein n-dimensionales Integral,

$$\begin{aligned} V_0 \;&=\; e^{-rT}\,\mathsf{E}\bigl[\,H(\,\{S_{t_k}\}_{k=0}^n\,)\,\bigr] \\ &=\; \int_{\mathbb{R}^n} H(\,\{S_{t_k}\}_{k=0}^n\,)\;\prod_{k=1}^n e^{-\frac{\phi_k^2}{2}}\;\tfrac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \tag{5}$$

wobei gemäss Gleichung (5) die S_{t_k} Funktionen von den $\phi_1,\cdots,\phi_k$ sind,

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_k}(\,\{\phi_\ell\}_{\ell=1}^k\,) \tag{6}$$

Also, wenn wir das jetzt mit der Notation aus dem `week4a.pdf` matchen möchten, dort hatten wir ja Integrale der Form

$$I \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} F(\phi)\, p(\phi)\, d^n\phi \tag{7}$$

dann haben wir jetzt

$$p(\phi) \;=\; \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{\phi_k^2}{2}} \frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}} \tag{8}$$

$$F(\phi) \;=\; H\big[\,\{S_{t_k}(\{\phi_\ell\}_{\ell=1}^k)\}_{k=0}^n\,\big] \tag{9}$$

und die Monte Carlo Evaluation geht dann also folgendermassen: Wir generieren N Zufallsvektoren

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} &= \big(\,\phi_1^{(1)}\,,\,\cdots\,,\,\phi_n^{(1)}\,\big) \\ &\;\vdots \\ \phi^{(N)} &= \big(\,\phi_1^{(N)}\,,\,\cdots\,,\,\phi_n^{(N)}\,\big) \end{aligned} \tag{10}$$

und simulieren damit N risikoneutrale Black-Scholes Pfade gemäss

$$S_{t_k}^{(i)} \;=\; S_{t_{k-1}}^{(i)}\big(\,1 \,+\, r\,\Delta t \,+\, \sigma\sqrt{\Delta t}\;\phi_k^{(i)}\,\big) \tag{11}$$

mit $S_{t_0}^{(i)} = S_0 =$ aktueller Underlyingpreis. Den Optionspreis V_0 aus (2) können wir dann numerisch approximieren durch die Monte Carlo Summe

$$V_0 \;\approx\; e^{-rT} \,\times\, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} H\Big[\,\big\{\,S_{t_k}\big(\{\phi_\ell^{(i)}\}_{\ell=1}^k\big)\,\big\}_{k=0}^n\,\Big] \tag{12}$$

oder etwas intuitiver geschrieben,

$$V_0 \;=\; e^{-rT} \,\times\, \mathsf{E}\big[\,H(\{S_t\}_{0\le t\le T})\,\big] \tag{13}$$

mit

$$\mathsf{E}\big[\,H(\{S_t\}_{0\le t\le T})\,\big] \;=\; \frac{1}{\text{number of paths}}\sum_{\text{paths}} H(\text{path}) \quad+\quad \text{error} \tag{14}$$

wobei der Monte Carlo Fehler von der Grössenordnung $1/\sqrt{N}$ ist,

$$\text{error} \;=\; O\big(\tfrac{1}{\sqrt{N}}\big) \tag{15}$$

Large Step Evaluation für pfadunabhängige Optionen

Wenn wir eine pfadunabhängige Option haben, hängt die Auszahlung nur von dem S_T ab,

$$H \;=\; H(S_T) \tag{16}$$

und der Optionspreis lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} V_0 \;&=\; e^{-rT}\,\mathsf{E}\big[\,H(S_T)\,\big] \\ &\overset{(3)}{=}\; e^{-rT}\,\mathsf{E}\Big[\,H\big(\,S_0\,e^{\sigma x_T + (r-\sigma^2/2)T}\,\big)\,\Big] \end{aligned} \tag{17}$$

Wir können das grundlegende Theorem zur Evaluation von Wiener-Erwartungswerten aus der FM1 anwenden, das sind die Formeln, die wir in dem aktuellen week3b.pdf in der Gleichung (6) noch einmal zusammengefasst haben, und bekommen

$$\begin{aligned} V_0 \;&=\; e^{-rT}\int_{\mathbb{R}} H\big(\,S_0\,e^{\sigma x_T + (r-\sigma^2/2)T}\,\big)\;p(0,x_T)\;dx_T \\ &=\; e^{-rT}\int_{\mathbb{R}} H\big(\,S_0\,e^{\sigma x_T + (r-\sigma^2/2)T}\,\big)\;e^{-\frac{x_T^2}{2T}}\;\tfrac{dx_T}{\sqrt{2\pi T}} \\ &=\; e^{-rT}\int_{\mathbb{R}} H\big(\,S_0\,e^{\sigma\sqrt{T}\,x + (r-\sigma^2/2)T}\,\big)\;e^{-\frac{x^2}{2}}\;\tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \tag{18}$$

wobei wir in der letzten Zeile die Substitution $x_T = \sqrt{T}x$ gemacht haben. Das ist jetzt also nur noch ein 1-dimensionales Integral und kein n-dimensionales wie in Gleichung (5). Deshalb brauchen wir zur Monte Carlo Evaluation jetzt nur $N \times 1$ anstatt $N \times n$ standard normalverteilte Zufallszahlen $x^{(1)}, \cdots, x^{(N)}$ und bekommen dann den 'large step' Monte Carlo Preis

$$V_0 \;\approx\; e^{-rT} \;\times\; \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} H\big(\,S_0\,e^{\sigma\sqrt{T}\,x^{(i)} + (r-\sigma^2/2)T}\,\big) \tag{19}$$

und diese Formel (21) soll also bei der Aufgabe (1b) vom Übungsblatt 4 angewendet werden. Die allgemeine Formel (14) werden wir dann brauchen, wenn wir etwa die analytischen Pricing-Formeln für Barrier-Optionen oder All-Time-High Optionen, die wir dann in den nächsten 2 Kapiteln herleiten werden, durch eine Monte Carlo Simulation verifizieren wollen. Die Evaluation gemäss (14), wo also pro Pfad $n = T/\Delta t$ Zufallszahlen generiert werden müssen anstatt nur einer einzigen, wird dann auch als 'small step' Evaluation bezeichnet.

Zur Erinnerung noch einmal das grundlegende Theorem 4.1 aus der FM1 zur Evaluation von Erwartungswerten bezüglich des Wiener-Maßes:

Theorem (Erwartungswerte bzg. des Wiener-Maßes, FM1) Es sei

$$p_t(x,y) \;:=\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\,e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} \tag{20}$$

und, mit $T = N\Delta t$ fest und $N \to \infty$, $\Delta t \to 0$,

$$dW \;=\; \prod_{k=1}^{N} p_{\Delta t}(x_{t_{k-1}}, x_{t_k})\, dx_{t_k} \;=\; \prod_{k=1}^{N} \left\{ e^{-\frac{(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})^2}{2\Delta t}} \; \frac{dx_{t_k}}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \right\}$$
$$= \prod_{k=1}^{N} \left\{ e^{-\frac{\phi_k^2}{2}} \; \frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}} \right\} \tag{21}$$

sei das Wiener-Mass, wobei man entweder die $\{ x_{t_k} \}_{k=1}^{N}$ als die Integrationsvariablen wählen kann oder die $\{ \phi_k \}_{k=1}^{N}$, wenn der Zusammenhang zwischen den ϕ_k und den x_{t_k} durch die Gleichung

$$x_{t_k} \;=\; \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^{k} \phi_j \qquad \Leftrightarrow \qquad \phi_k \;=\; \frac{x_{t_k} \,-\, x_{t_{k-1}}}{\sqrt{\Delta t}} \tag{22}$$

gegeben ist, mit der Definition $x_{t_0} = x_0 := 0$. Dann gilt für eine beliebige Funktion

$$F \;:\; \mathbb{R}^m \;\to\; \mathbb{R}$$

und für beliebige Zeitpunkte $0 =: t_0 < t_1 < \cdots < t_m \leq T$:

$$\mathsf{E}[F] \;\stackrel{\text{Def.}}{=}\; \int_{\mathbb{R}^N} F(x_{t_1}, ..., x_{t_m})\, dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$$
$$\stackrel{\text{Thm.}}{=}\; \int_{\mathbb{R}^m} F(x_{t_1}, ..., x_{t_m}) \prod_{\ell=1}^{m} p_{t_\ell - t_{\ell-1}}(x_{t_{\ell-1}}, x_{t_\ell})\, dx_{t_\ell} \tag{23}$$