

week3b: Abschluss Auffrischung Finanzmathematik I Optionspreisbewertung im Black-Scholes Modell

Wir wollen uns jetzt überlegen, wie man Optionspreise im Black-Scholes Modell berechnen kann. Die grundlegende Optionspreislogik war ja, dass wir einen eindeutig bestimmten Geldbetrag V_0 bestimmen können, das ist dann der Optionspreis, und eine Handelsstrategie $\{\delta_k\}_{k=0}^{N-1}$ angeben können, so dass, egal, ob der der Option zu Grunde liegende Basiswert S_t steigt, fällt, oder neutral bleibt, die Handelsstrategie am Ende immer die Optionsauszahlung $H(S_T)$ generieren tut.

Eine wesentliche Voraussetzung, dass man eine solche Handelsstrategie angeben kann, war allerdings, dass von einem Handelszeitpunkt zum nächsten das Underlying immer nur zwei verschiedene Werte annehmen darf, also das Ganze funktioniert zunächst mal nur in einem Binomialmodell. Deshalb hatten wir uns dann in der letzten Veranstaltung überlegt, wie man ein Black-Scholes Modell, was ja von einem Zeitpunkt zum nächsten ein ganzes Kontinuum an möglichen Preisen zulässt, durch ein geeignetes Binomialmodell approximieren kann. Wir hatten dann gesehen, dass man das machen kann, wenn man die folgenden Einstellungsmöglichkeiten für die up- und down-Return wählt:

$$\text{ret}_{\text{up}} = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \quad (1)$$

$$\text{ret}_{\text{down}} = \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t} \quad (2)$$

Jetzt wissen wir aber, wie wir im Binomialmodell Optionspreise berechnen können. Für eine pfadunabhängige Option mit Payoff $H(S_T)$ hatten wir dazu in der Finanzmathematik I die folgende Formel hergeleitet:

Theorem: Consider a price process $S_k = S(t_k)$ given by a Binomial model with returns $\text{ret}_k \in \{\text{ret}_{\text{up}}, \text{ret}_{\text{down}}\}$ and let r denote the interest rates paid per period. Let p_{rn} be the risk neutral probability given by

$$p_{\text{rn}} = \frac{r - \text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}} \quad (3)$$

Let

$$H = H(S_N)$$

be the payoff of some path independent option which depends on the underlying at maturity only. Then the time zero theoretical fair value V_0 of this option can be written as

$$V_0 = (1+r)^{-N} \times \sum_{\ell=0}^N H(S_{N,\ell}) \times \binom{N}{\ell} p_{\text{rn}}^{\ell} (1-p_{\text{rn}})^{N-\ell} \quad (4)$$

with

$$S_{N,\ell} = S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^{\ell} (1 + \text{ret}_{\text{down}})^{N-\ell} .$$

Also, alles, was wir jetzt machen müssen, ist, die Werte für die Returns (1,2) in die Formeln (3) und (4) einzusetzen, und dann den Limes $\Delta t \rightarrow 0$ zu berechnen mit $T = N\Delta t$ fest, also $N = T/\Delta t \rightarrow \infty$. Der Zinssatz pro Periode wäre dann $r\Delta t$ wenn etwa r einen jährlichen Zins bezeichnet und Δt in year fraction angegeben ist. Wir hatten dann in der Finanzmathematik I das folgende Resultat bekommen, das ist die grundlegende Pricing-Formel für pfadunabhängige Optionen im Black-Scholes Modell:

Theorem (Optionspreisbewertung im BS-Modell, pfadunabhängige Optionen):

Consider a Binomial model with returns (1,2) which converges to the Black-Scholes model $S_t = S_0 e^{\sigma x_t + (\mu - \sigma^2/2)t}$ with real world drift parameter μ . Let V_0^{Bin} be the theoretical fair value of some path independent option $H = H(S_T)$ in the Binomial model given by equation (4) above with r replaced by $r\Delta t$ and risk neutral probability given by equation (3) above. Then

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_0^{\text{Bin}} = V_0^{\text{BS}} \quad (5)$$

where the Black-Scholes price is given by one of the following equivalent formulae:

$$\begin{aligned} V_0^{\text{BS}} &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} H(S_0 e^{\sigma \sqrt{T}x + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} H(S_0 e^{\sigma x + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}) e^{-\frac{x^2}{2T}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi T}} \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}^N} H(S_0 e^{\sigma x_{t_N} + (r - \frac{\sigma^2}{2})t_N}) \prod_{k=1}^N e^{-\frac{(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})^2}{2dt}} \frac{dx_{t_k}}{\sqrt{2\pi dt}} \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}^N} H(S_0 e^{\sigma x_{t_N} + (r - \frac{\sigma^2}{2})t_N}) \prod_{k=1}^N e^{-\frac{\phi_k^2}{2}} \frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \quad (6)$$

with discretized times $t_k = kdt$ for $k = 0, 1, \dots, N$, $t_N = Ndt = T$ and

$$x_{t_k} = \sqrt{dt} \sum_{j=1}^k \phi_j$$

being a Brownian motion.

Bemerkungen:

(i) Beachten Sie, dass die ersten beiden Integrale in der Formel (6) eindimensionale Integrale sind und die letzten beiden N -dimensionale Integrale, wobei das N nach unendlich geht, wenn wir die Diskretisierungslänge dt nach 0 gehen lassen, so dass $T = t_N = Ndt$ fest bleibt.

(ii) In dem dritten Integral sind die N Integrationsvariablen die $x_{t_1}, \dots, x_{t_N}$ und in dem vierten Integral sind die Integrationsvariablen die $\phi_1, \dots, \phi_N$.

(iii) Den Ausdruck

$$S_{t_N} = S_0 e^{\sigma x_{t_N} + (r - \frac{\sigma^2}{2})t_N} \quad (7)$$

hatten wir bereits in dem week2b.pdf als eine Lösung der Black-Scholes SDE

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dx_t$$

identifiziert.

(iv) Im Fall von pfadabhängigen Optionen, wo die Optionsauszahlung also nicht nur von dem $S_T = S_{t_N}$, sondern von dem gesamten realisierten Preispfad $\{S_{t_k}\}_{k=0}^N$ abhängen kann,

$$H = H\left(\{S_{t_k}\}_{k=0}^N\right) \quad (8)$$

verallgemeinert sich die Pricing-Formel (6) dann zu

$$V_0^{\text{BS}} = e^{-rT} \int_{\mathbb{R}^N} H\left(\{S_{t_k}\}_{k=0}^N\right) \prod_{k=1}^N e^{-\frac{\phi_k^2}{2}} \frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}} \quad (9)$$

mit

$$S_{t_k} = S_0 e^{\sigma x_{t_k} + (r - \frac{\sigma^2}{2})t_k} = S_0 e^{\sigma \sqrt{dt} \sum_{j=1}^k \phi_j + (r - \frac{\sigma^2}{2})t_k} \quad (10)$$

Das ist also im wesentlichen dasselbe wie in der 4. Zeile von (6), nur mit dem Unterschied, dass im Fall von pfadabhängigen Payoffs in der Regel keine Reduktion mehr auf ein eindimensionales Integral möglich ist. Es stellt sich dann die Frage, wie die Preise von solchen Optionen dann konkret berechnet werden können. Die Standard-Methode ist Monte Carlo Simulation, das schauen wir uns dann nächste Woche an.