

week3a: Auffrischung Finanzmathematik I
Optionspreisbewertung im Black-Scholes Modell

Das zeitdiskrete Black-Scholes Modell war gegeben durch die Preisdynamik

$$S_{t_k} = S_{t_{k-1}} (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k) \quad (1)$$

mit $t_k = k\Delta t$ und reellen Konstanten μ und σ und unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallszahlen $\{\phi_k\}_{k=1}^N$. Wir hatten gesehen, dass für kleine Δt die stochastische Rekursion (1) durch den folgenden Ausdruck gelöst wird, der auch als geometrische Brownsche Bewegung bezeichnet wird:

$$S_{t_k} = S_{t_0} \exp \left\{ \sigma x_{t_k} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_k \right\} \quad (2)$$

wobei das x_{t_k} , eine Brownsche Bewegung in diskreter Zeit, die folgende Kombination von standard-normalverteilten Zufallszahlen ist,

$$x_{t_k} = \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j$$

Wir wollen uns zunächst an das folgende Theorem erinnern, was besagt, dass die Summe von normalverteilten Zufallszahlen wieder normalverteilt ist, und was typischerweise in einer Stochastik-Vorlesung bewiesen wird. In der Stochastik II Vorlesung aus dem SS2021 wurde das etwa in dem Theorem 2.2.1 in dem week3a.pdf gemacht, <http://hsrm-mathematik.de/SS2021/semester4/Stochastik2/week3a.pdf>. Oder in der Finanzmathematik I hatten wir das in dem Kapitel 4.2 über Brownsche Bewegung und Wiener-Mass gemacht.

Theorem (Summe von normalverteilten Zufallszahlen): Es seien $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ normalverteilte Zufallsvariablen mit Mittelwerten $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ und Standardabweichungen $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Dann gilt: Die Summe

$$\phi := \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n$$

ist normalverteilt mit Mittelwert

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$

und Varianz

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

Das heisst genauer, für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\phi_1 + \dots + \phi_n) \prod_{k=1}^n e^{-\frac{(\phi_k - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}} \frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} = \int_{\mathbb{R}} f(\phi) e^{-\frac{(\phi - \mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}. \quad (3)$$

Als unmittelbare Konsequenz daraus können wir zunächst mal das folgende Theorem festhalten:

Theorem: Es seien $\{\phi_k\}_{k=1}^N$ eine Folge von unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallszahlen und

$$x_{t_k} = \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j$$

sei eine Brownsche Bewegung in diskreter Zeit mit $t_k = k\Delta t$. Dann gilt für beliebige Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[f(x_{t_k})] = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2t_k}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi t_k}} \quad (4)$$

Beweis: Wir wenden das Theorem 2.2.1 aus der Stochastik II an mit $n = k$ und

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \end{aligned}$$

und Varianz

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2 \\ &= 1 + 1 + \dots + 1 = k \end{aligned}$$

und bekommen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(x_{t_k})] &= \int_{\mathbb{R}^k} f\left(\sqrt{\Delta t} (\phi_1 + \dots + \phi_k)\right) \prod_{j=1}^k e^{-\frac{\phi_j^2}{2}} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(\sqrt{\Delta t} \phi\right) e^{-\frac{(\phi-0)^2}{2k}} \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi k}} \\ &\stackrel{x:=\sqrt{\Delta t} \phi}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2k\Delta t}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi k\Delta t}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2t_k}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi t_k}} \end{aligned}$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

Wir wollen jetzt das zeitdiskrete Black-Scholes Modell (1) durch ein Binomial-Modell approximieren. Das zeitdiskrete Black-Scholes Modell hat die Returns

$$\text{ret}_{t_k} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k$$

mit $E[\phi_k] = 0$ und $V[\phi_k] = 1$. Diese Returns wollen wir ersetzen durch Returns, die nur zwei Einstellungsmöglichkeiten ret_{up} und ret_{down} zulassen. Die folgende Wahl bietet sich an:

$$\begin{aligned}\text{ret}_{\text{up}} &:= \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \\ \text{ret}_{\text{down}} &:= \mu \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t}\end{aligned}$$

oder etwas anders geschrieben

$$\text{ret}_{t_k} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k \quad (5)$$

mit den Zufallszahlen

$$\varepsilon_k := \begin{cases} +1 & \text{mit W'keit } 1/2 \\ -1 & \text{mit W'keit } 1/2 \end{cases} \quad (6)$$

Wir haben dann ebenfalls

$$E[\varepsilon_k] = +1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$$

und

$$\begin{aligned}V[\varepsilon_k] &= E[\varepsilon_k^2] - (E[\varepsilon_k])^2 = E[\varepsilon_k^2] \\ &= (+1)^2 \times \frac{1}{2} + (-1)^2 \times \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

Wir betrachten also das N -Perioden Binomialmodell mit Preisdynamik

$$S_{t_k} = S_{t_{k-1}} (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k) \quad (7)$$

Wenn sich ℓ up>Returns realisiert haben, ist der Preis S_{t_N} gegeben durch

$$S_{N,\ell} = S_0 (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t})^\ell (1 + \mu \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t})^{N-\ell}$$

Erwartungswerte in diesem Binomialmodell sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned}E[f(S_{t_N})] &= E\left[f\left(S_0 \prod_{j=1}^N (1 + \text{ret}_j)\right)\right] \\ &= \sum_{\ell=0}^N f(S_{N,\ell}) \times \text{Prob}[\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}] \\ &= \sum_{\ell=0}^N f(S_{N,\ell}) \times \binom{N}{\ell} \times \left(\frac{1}{2}\right)^\ell \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{N-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^N f(S_{N,\ell}) \times \frac{1}{2^N} \binom{N}{\ell} =: E^{\text{Bin}}[f(S_{t_N})] \quad (8)\end{aligned}$$

während Erwartungswerte im zeitdiskreten Black-Scholes Modell gegeben sind durch

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(S_{t_N})] &= \mathbb{E}\left[f\left(S_0 \prod_{j=1}^N (1 + \text{ret}_j)\right)\right] \\
&\stackrel{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \text{week2b}}}{=} \mathbb{E}\left[f\left(S_0 \exp\left\{\sigma x_{t_N} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_N\right\}\right)\right] \\
&\stackrel{\text{ausführlich}}{=} \int_{\mathbb{R}^N} f\left(S_0 \exp\left\{\sigma x_{t_N} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_N\right\}\right) \prod_{k=1}^N e^{-\frac{\phi_k^2}{2}} \frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}} \\
&\stackrel{\text{Thm. Stochastik II}}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(S_0 \exp\left\{\sigma x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_N\right\}\right) e^{-\frac{x^2}{2t_N}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi t_N}} \\
&=: \mathbb{E}^{\text{BS}}[f(S_{t_N})]
\end{aligned} \tag{9}$$

mit

$$x_{t_N} = \sqrt{\Delta t} \sum_{k=1}^N \phi_k$$

In der Finanzmathematik I hatten wir dann das folgende Theorem bewiesen:

Theorem: Es sei $T = t_N = N\Delta t$ ein fester Zeithorizont. Wir betrachten den Grenzwert $\Delta t \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ mit $T = N\Delta t$ fest. Für eine beliebige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei $\mathbb{E}^{\text{BS}}[\cdot]$ der Erwartungswert im zeitdiskreten Black-Scholes Modell gegeben durch (9) und $\mathbb{E}^{\text{Bin}}[\cdot]$ sei der Erwartungswert im approximierenden Binomialmodell gegeben durch (8). Dann gilt:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E}^{\text{Bin}}[f(S_T)] = \mathbb{E}^{\text{BS}}[f(S_T)] \tag{10}$$

oder explizit

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{\ell=0}^N f(S_{N,\ell}) \times \frac{1}{2^N} \binom{N}{\ell} = \int_{\mathbb{R}} f\left(S_0 \exp\left\{\sigma x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right\}\right) e^{-\frac{x^2}{2T}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi T}} \tag{11}$$

mit

$$S_{N,\ell} = S_0 (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t})^\ell (1 + \mu \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t})^{N-\ell} \tag{12}$$

Diese Resultate konnten wir dann benutzen, um den Preis einer Option im Black-Scholes Modell zu berechnen. Fassen wir das vielleicht am Donnerstag noch einmal zusammen, bevor wir dann nächste Woche mit den neuen Finanzmathematik II Sachen beginnen. Halten wir vorher noch die folgende Definition aus der Finanzmathematik I fest:

Definition (Wiener-Mass und Brownsche Bewegung): Es sei $t_k = k \Delta t$ mit $k = 0, 1, \dots, N$ und $t_0 = 0$ und $t_N = N\Delta t =: T$ eine Diskretisierung des Zeitintervalls $[0, T]$. Dann heisst

$$dW(\{\phi_k\}_{k=1}^N) := \prod_{k=1}^N e^{-\frac{\phi_k^2}{2}} \frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}}$$

das Wiener-Mass auf dem $\mathbb{R}^N$ und, schreiben wir es nochmal hin, die Kombination von Integrationsvariablen

$$x_{t_k} := \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j$$

heisst eine Brownsche Bewegung.