

week2b: Auffrischung Finanzmathematik I
Das Black-Scholes Modell und die Brownsche Bewegung

Es sei S_{t_k} der Preis eines liquide handelbaren Assets zur Zeit t_k . Die Returns ret_{t_k} waren definiert durch

$$\text{ret}_{t_k} := \frac{S_{t_k} - S_{t_{k-1}}}{S_{t_{k-1}}} \quad (1)$$

so dass wir auch schreiben können

$$S_{t_k} = S_{t_{k-1}} (1 + \text{ret}_{t_k}) \quad (2)$$

Aus Gleichung (2) folgt dann durch wiederholte Anwendung oder durch Induktion die Formel

$$S_{t_N} = S_{t_0} \prod_{k=1}^N (1 + \text{ret}_{t_k}) \quad (3)$$

Durch Angabe der Returns $\{\text{ret}_{t_k}\}_{k=1}^N$ sind also die Asset-Preise $\{S_{t_k}\}_{k=1}^N$ eindeutig festgelegt. Wir wollen zunächst mal ein bisschen Gefühl für die Returns von typischen Finanzzeitreihen bekommen und erinnern uns an das 10. Übungsblatt (oder auch schon an das neunte) aus der Excel/VBA-Vorlesung:

<https://hsrc-mathematik.de/SS2023/semester4/ExcelVBA/ueb10.pdf>
<https://hsrc-mathematik.de/SS2023/semester4/ExcelVBA/Loesung10.xlsm>

Wir hatten die täglichen Returns (1) und Mittelwert und Standardabweichung der täglichen Returns gegeben durch

$$\mu_{\text{ret}} := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \text{ret}_{t_k} \quad (4)$$

$$\sigma_{\text{ret}}^2 := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\text{ret}_{t_k} - \mu_{\text{ret}})^2 \quad (5)$$

berechnet und uns dann standardisierte oder normierte Returns gegeben durch

$$\text{normret}_{t_k} := \frac{\text{ret}_{t_k} - \mu_{\text{ret}}}{\sigma_{\text{ret}}} \quad (6)$$

angeschaut. Wir hatten ein Histogramm der standardisierten Returns gemacht und es so skaliert, dass die Fläche unter dem Histogramm gleich 1 ist. Dann hatten wir zum Vergleich die Dichte der Standard-Normalverteilung

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (7)$$

in dasselbe Histogramm geplottet. Dann stellt man fest, dass die beiden Sachen nicht zu verschieden sind. Deshalb machen wir jetzt die folgende Annahme:

$$\text{normret}_{t_k} = \frac{\text{ret}_{t_k} - \mu_{\text{ret}}}{\sigma_{\text{ret}}} \approx \phi_k \quad \text{standard normalverteilt} \quad (8)$$

oder

$$\text{ret}_{t_k} = \mu_{\text{ret}} + \sigma_{\text{ret}} \phi_k \quad (9)$$

mit reellen Konstanten μ_{ret} und σ_{ret} und unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallszahlen $\{\phi_k\}_{k=1}^N$. Wieder durch eine reine Datenanalyse hatten wir dann das folgende Skalierungs-Verhalten festgestellt:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{ret}} &\sim \Delta t \\ \sigma_{\text{ret}} &\sim \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

so dass man etwa schreiben kann

$$\mu_{\text{ret}} = \mu \Delta t \quad (10)$$

$$\sigma_{\text{ret}} = \sigma \sqrt{\Delta t} \quad (11)$$

mit neuen Konstanten μ und σ . Setzen wir (10,11) in (9) ein und Gleichung (9) dann in Gleichung (2), erhalten wir das zeitdiskrete Black-Scholes Modell, gegeben durch folgende Gleichung (12):

Definition (Black-Scholes Modell): Eine Preisdynamik gegeben durch

$$S_{t_k} = S_{t_{k-1}} (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k) \quad (12)$$

mit reellen Konstanten μ und σ und unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallszahlen $\{\phi_k\}_{k=1}^N$ wird als das zeitdiskrete **Black-Scholes Modell** bezeichnet. Der Parameter μ heisst auch Drift-Parameter und das σ wird als Volatilität oder auch Diffusionsparameter bezeichnet.

In der Gleichung (12) werden die Asset-Preise S_{t_k} durch eine Rekursion bestimmt. Man kann nun versuchen, eine direkte Formel für die S_{t_k} anzugeben, indem man die Rekursion (12) iterieren tut, oder, äquivalent, indem man die Gleichung (3) benutzt mit den Returns

$$\text{ret}_{t_k} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k \quad (13)$$

Diese Vorgehensweise führt dann direkt auf den Begriff der Brownschen Bewegung, die für die weiteren Kapitel in der Finanzmathematik II sehr wichtig ist, deswegen wollen wir uns diese Rechnung jetzt noch einmal im Detail genau anschauen: Wir bekommen

$$\begin{aligned}
S_{t_N} &= S_{t_0} \prod_{k=1}^N (1 + \text{ret}_{t_k}) \\
&= S_{t_0} \prod_{k=1}^N (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k) \\
&= S_{t_0} \exp \left\{ \log \left[\prod_{k=1}^N (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k) \right] \right\} \\
&= S_{t_0} \exp \left\{ \sum_{k=1}^N \log [1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k] \right\}
\end{aligned} \tag{14}$$

Wir machen eine Taylor-Entwicklung 2. Ordnung für $f(x) := \log[1+x]$ mit $x := \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k$. Mit der allgemeinen Formel

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + O(x^3)$$

bekommen wir dann

$$\begin{aligned}
\log[1+x] &= \log[1] + \frac{1}{1+0}x + \frac{1}{2} \frac{-1}{(1+0)^2}x^2 + O(x^3) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)
\end{aligned}$$

Also, wenn wir Terme der Grössenordnung $O(\Delta t^{3/2})$ ignorieren,

$$\begin{aligned}
\log[1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k] &\approx \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k - \frac{(\mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k)^2}{2} \\
&\approx \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k - \frac{\sigma^2}{2} \Delta t \phi_k^2
\end{aligned} \tag{15}$$

Die Approximation (15) setzen wir in (14) ein und bekommen die Darstellung

$$\begin{aligned}
S_{t_N} &\approx S_{t_0} \exp \left\{ \sum_{k=1}^N \left[\mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k - \frac{\sigma^2}{2} \Delta t \phi_k^2 \right] \right\} \\
&= S_{t_0} \exp \left\{ \mu N \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{k=1}^N \phi_k - \frac{\sigma^2}{2} \Delta t \sum_{k=1}^N \phi_k^2 \right\}
\end{aligned} \tag{16}$$

Durch diese Darstellung wird nahegelegt, die folgenden Grössen einzuführen, etwa für beliebiges $k \in \{1, 2, \dots, N\}$

$$x_{t_k} := \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j \tag{17}$$

$$I_{t_k} := \Delta t \sum_{j=1}^k \phi_j^2 \tag{18}$$

Dann bekommen wir die folgenden Varianzen:

$$\mathbb{V}[x_{t_k}] = (\sqrt{\Delta t})^2 \sum_{j=1}^k \mathbb{V}[\phi_j] = \Delta t \sum_{j=1}^k 1 = k \Delta t = t_k \tag{19}$$

$$\mathbb{V}[I_{t_k}] = (\Delta t)^2 \sum_{j=1}^k \mathbb{V}[\phi_j^2] = (\Delta t)^2 \sum_{j=1}^k (3-1) = 2k(\Delta t)^2 = 2t_k \Delta t \rightarrow 0 \tag{20}$$

Und wegen $E[I_{t_k}] = k\Delta t = t_k$ sieht die Darstellung (16) dann so aus:

$$\begin{aligned} S_{t_N} &= S_{t_0} \exp \left\{ \mu t_N + \sigma x_{t_N} - \frac{\sigma^2}{2} I_{t_N} \right\} \\ &\stackrel{\Delta t \rightarrow 0}{\approx} S_{t_0} \exp \left\{ \mu t_N + \sigma x_{t_N} - \frac{\sigma^2 t_N}{2} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

Definition (Brownsche Bewegung): Es seien $\{\phi_k\}_{k=1}^N$ unabhängige, standard normalverteilte Zufallszahlen. Dann heisst die Kombination von Zufallszahlen (17),

$$x_{t_k} := \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j \quad (22)$$

eine Brownsche Bewegung.

Mit der Definition (22) können wir etwa schreiben

$$\Delta x_{t_k} := x_{t_k} - x_{t_{k-1}} = \sqrt{\Delta t} \phi_k \quad (23)$$

und die Rekursion (12) für das Black-Scholes Modell liest sich dann folgendermassen:

$$S_{t_k} = S_{t_{k-1}} (1 + \mu \Delta t + \sigma \Delta x_{t_k})$$

oder auch

$$\frac{\Delta S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}} := \frac{S_{t_k} - S_{t_{k-1}}}{S_{t_{k-1}}} = \mu \Delta t + \sigma \Delta x_{t_k} \quad (24)$$

Im Limes $\Delta t \rightarrow 0$ benutzt man dann auch die folgende Notation:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dx_t \quad (25)$$

und bezeichnet (25) dann als eine stochastische Differentialgleichung, das ist dann die stochastische Differentialgleichung (SDE) für das Black-Scholes Modell. Mit der Rechnung von oben haben wir dann also das folgende Theorem bewiesen:

Theorem (Lösung der Black-Scholes SDE): Die Black-Scholes SDE (25) wird gelöst durch

$$S_t = S_0 e^{\sigma x_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t} \quad (26)$$

mit x_t eine Brownsche Bewegung.

Das können wir dann am Dienstag nochmal mit einer Excel/VBA-Simulation verifizieren. Brownsche Bewegungen werden wir dann auch im weiteren Verlauf der Vorlesung simulieren müssen, das ist also sehr wichtig, dass man weiss, wie das geht.