week2a: Auffrischung Finanzmathematik I
Beispiele zum Binomialmodell

Wir wollen in dem folgenden Beispiel 1 den Preis einer Standard-Kauf-Option oder auch Call-Option in einem 3-Perioden Binomialmodell berechnen. Weiterhin wollen wir die replizierende Strategie berechnen, das heisst, wir wollen alle δ_k's angeben, die man braucht, um mit Hilfe der Handelsstrategie "Halte δ_k Aktien am Ende vom Tag t_k" die Optionsauszahlung generieren zu können. Dass das dann auch tatsächlich der Fall ist, wollen wir dann am Ende nochmal explizit überprüfen.

Die Option in Beispiel 1 ist eine pfadunabhängige Option, die Auszahlung H hängt nur vom Underlyingpreis S_N bei Maturity ab, $H = H(S_N)$. In Beispiel 2 betrachten wir dann eine pfadabhängige oder auch 'exotische' Option. Bei solchen Optionen tut die Auszahlung H nicht nur von dem Underlyingpreis bei Maturity S_N abhängen, sondern sie hängt von dem gesamten realisierten Preispfad ab, $H = H(S_0, S_1, \cdots, S_N)$. In einem solchen Fall ist es nicht mehr ausreichend, einen rekombinierenden Binomialbaum mit $N+1$ Endpunkten zu betrachten, sondern wir müssen eine Baumstruktur mit 2^N Endpunkten betrachten.

Beispiel 1: Wir betrachten einen Zeithorizont von 3 Wochen und wir nehmen an, dass sich der Preis $S_k = S(t_k)$ eines Underlyings S sich nur wöchentlich ändern kann und dabei nur 2 Einstellungsmöglichkeiten hat. Das heisst genauer, wir betrachten ein 3-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess[1]

$$S_k \;=\; S_{k-1} \times \begin{cases} (1+\mathrm{ret_{up}}) & \text{mit W'keit } \; p_{\mathrm{up}} \\ (1+\mathrm{ret_{down}}) & \text{mit W'keit } \; p_{\mathrm{down}} = 1 - p_{\mathrm{up}} \end{cases}$$

mit $k = 0, 1, 2, 3$ (und etwa $t_0 = 0$, $t_1 = 1\mathrm{week}$, $t_2 = 2\mathrm{weeks}$, $t_3 = 3\mathrm{weeks}$). Die wöchentlichen Returns seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{ret_{up}} &= +10\% \\ \mathrm{ret_{down}} &= -10\% \end{aligned}$$

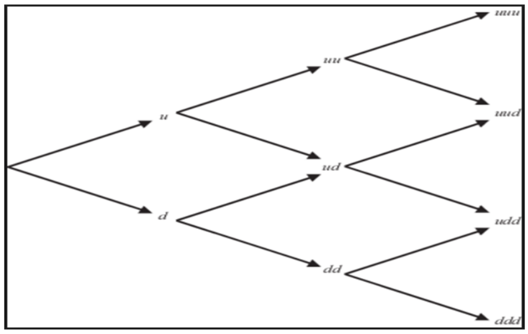
und die (etwa durch eine Zeitreihenanalyse ermittelte) Wahrscheinlichkeit für einen up-move sei 60%, $p_{\mathrm{up}} = 60\%$. Weiter sei $S_0 = 100$.

Sämtliche möglichen Preise in diesem Modell lassen sich durch zwei Parameter charakterisieren: Einem Zeit-Parameter $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, der uns sagt, in welcher Zeit-Periode wir gerade sind. Und einem weiteren Parameter ℓ, der uns sagt, wie viele up-moves es bis zum aktuellen Zeitpunkt gegeben hat. Also $\ell \in \{0, 1, 2, 3\}$. Der Preis $S_{k,\ell}$ zum Zeitpunkt k bei ℓ up-moves ist dann also gegeben durch

$$S_{k,\ell} \;:=\; S_0 (1+\mathrm{ret_{up}})^{\ell} (1+\mathrm{ret_{down}})^{k-\ell}$$

[1] die W'keiten p_{up} und p_{down} sind nur angegeben, um Sie zu irritieren, man braucht sie nicht, um den Optionspreis zu berechnen. Die replizierende Strategie funktioniert für beliebige Werte von p_{up} und p_{down}.

a) Machen Sie sich klar, dass alle möglichen Underlyingpreise $S_{k,\ell}$ durch die folgende Binomialbaum-Struktur verdeutlicht werden können,



und geben Sie die konkreten Werte von $S_{k,\ell}$ an jedem Knotenpunkt (k, ℓ) des Binomialbaums an.

b) Nehmen Sie an, dass die Zinsen Null sind, $r = 0$. Zeigen Sie, dass sich die Rekursionsformel für die Portfoliowerte V_k aus der Vorlesung sich in diesem Fall auf die Formel

$$V_k \;=\; \frac{V_{k+1}^{\text{up}} + V_{k+1}^{\text{down}}}{2}$$

reduziert.

c) Betrachten Sie eine Standard-Kauf-Option (oder Call-Option) mit Fälligkeit $t_N = t_3 =$ 3weeks und Auszahlungsfunktion

$$H_{\text{call}}(S_3) \;=\; \max\{S_3 - S_0 \,,\, 0\}$$

Berechnen Sie den Preis dieser Option, indem Sie die Rekursionsformel aus Teil (b) verwenden.

d) Berechnen Sie jetzt für jeden Knotenpunkt im Binomial-Baum das $\delta_{k,\ell}$, die Anzahl von Aktien, die man zum Zeitpunkt t_k halten muss, wenn der Aktien- oder Underlyingpreis $S_{k,\ell}$ ist, damit man die Auszahlung H_{call} aus (c) replizieren kann.

e) Betrachten Sie jetzt die folgenden 2 Preis-Pfade:

$$\begin{aligned} \text{Pfad}_1 \;&:=\; \{\text{down}, \text{up}, \text{up}\} \\ \text{Pfad}_2 \;&:=\; \{\text{up}, \text{up}, \text{down}\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie jetzt explizit für diese beiden Pfade, dass die replizierende Strategie definiert durch die δ's aus Teil (d) tatsächlich die Optionsauszahlung aus (c) replizieren tut.

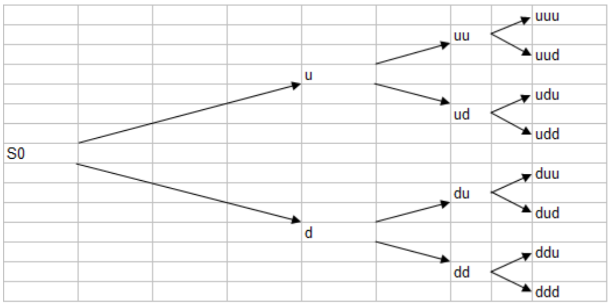
Beispiel 2: Wir betrachten wieder ein 3-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess

$$S_k \;=\; S_{k-1} \times (1 + \text{ret}_k)$$

mit Returns gegeben durch $\text{ret}_k \in \{\, +10\% \,,\, -10\% \,\}$ für $k = 1, 2, 3$ und nehmen an, dass die Zinsen Null sind, $r = 0$. Es sei $S_0 = 100$. Wir betrachten eine All Time High Option mit Auszahlung

$$H\big(\{S_k\}\big) \;=\; \max_{k \in \{0,1,2,3\}} S_k \;-\; S_0$$

a) Berechnen Sie den Preis V_0 dieser Option. Machen Sie sich dazu zunächst klar, dass es jetzt nicht mehr ausreichend ist, einen rekombinierenden Binomial-Baum mit 4 End-Punkten zu betrachten (wie in Beispiel 1), sondern Sie müssen folgende Baum-Struktur betrachten,



n-Perioden Binär-Baum mit 2^n Endpunkten, $n = 3$

Berechnen Sie dann wieder die V_k an allen Knotenpunkten mit Hilfe der Rekursionsformel aus Theorem 2.1.

b) Berechnen Sie für jeden Knotenpunkt die δ's, die Anzahl von Aktien, die man halten muss, damit man die Optionsauszahlung H replizieren kann.

c) Betrachten Sie jetzt die folgenden 2 Preis-Pfade:

$$\begin{aligned} \text{Pfad}_1 &:= \{\text{up}, \text{up}, \text{up}\} \\ \text{Pfad}_2 &:= \{\text{up}, \text{down}, \text{down}\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie explizit für diese beiden Pfade, dass die replizierende Strategie definiert durch die δ's aus Teil (b) tatsächlich die Optionsauszahlung H replizieren tut.