week1b: Auffrischung Finanzmathematik I
Das N-Perioden Binomialmodell

Wir hatten die folgende Definition gemacht:

Definition (Binomialmodell): If the price process $S_k = S(t_k)$ of some tradable asset S has the dynamics

$$S_k \;=\; S_{k-1}(\,1 \;+\; \mathrm{ret}_k\,) \qquad \text{with} \quad \mathrm{ret}_k \in \{\mathrm{ret}_{\mathrm{up}}, \mathrm{ret}_{\mathrm{down}}\} \tag{1}$$

for all k, then we say that S is given by the Binomial model.

Es wurde dann das folgende Theorem bewiesen:

Theorem (Optionspreisbewertung im Binomialmodell): Let S be some tradable asset whose price process is given by the Binomial model (1). Let r be some interest rate per period such that cash amounts G change their values according to $G \overset{t_{k-1}\to t_k}{\to} G(1+r)$. Then every option payoff

$$H \;=\; H(S_0, ..., S_N)$$

can be replicated. A replicating strategy is given by, for $k = 0, 1, ..., N-1$:

$$\delta_k \;=\; \delta_k(S_0, \cdots, S_k) \;=\; \frac{V_{k+1}^{\mathrm{up}} \,-\, V_{k+1}^{\mathrm{down}}}{S_{k+1}^{\mathrm{up}} \,-\, S_{k+1}^{\mathrm{down}}} \tag{2}$$

with the abbreviations

$$\begin{aligned} S_{k+1}^{\mathrm{up/down}} \;&:=\; S_k\,(\,1 \;+\; \mathrm{ret}_{\mathrm{up/down}}\,) \\ V_{k+1}^{\mathrm{up/down}} \;&:=\; V_{k+1}\big(\,S_0\,,\,\cdots\,,\,S_k\,,\,S_{k+1}^{\mathrm{up/down}}\,\big) \end{aligned}$$

and the portfolio values V_k, including the theoretical fair value, the option price V_0, can be inductively calculated through the following formulae:

$$V_k \;=\; (1+r)^k\, v_k$$

with discounted portfolio values v_k given recursively by

$$v_k \;=\; w_{\mathrm{up}}\, v_{k+1}^{\mathrm{up}} \;+\; w_{\mathrm{down}}\, v_{k+1}^{\mathrm{down}} \tag{3}$$

and the recursion starts at $k = N$ with discounted portfolio values

$$v_N \;:=\; (1+r)^{-N}\, H(S_0, \cdots, S_N)$$

The weights w_{up} and w_{down} are given by

$$w_{\text{up}} \;=\; \frac{r \;-\; \text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} \;-\; \text{ret}_{\text{down}}} \tag{4}$$

$$w_{\text{down}} \;=\; 1 - w_{\text{up}} \;=\; \frac{\text{ret}_{\text{up}} \;-\; r}{\text{ret}_{\text{up}} \;-\; \text{ret}_{\text{down}}} \tag{5}$$

Remarks: 1) If H is a path-independent or non-exotic option which depends only on the underlying price at maturity,

$$H \;=\; H(S_N)$$

then the δ_k and the value of the replicating portfolio V_k at t_k depend only on the asset price S_k and do not depend on earlier prices $S_{k-1}, S_{k-2}, ..., S_0$. That is,

$$\begin{aligned} V_k &= V_k(S_k) \\ \delta_k &= \delta_k(S_k) \end{aligned}$$

2) Assume zero interest rates $r = 0$ such that $R = 1 + r = 1$ and $v_k = V_k$. Then (3) becomes

$$V_k \;=\; w_{\text{up}}\, V_{k+1}^{\text{up}} \;+\; w_{\text{down}}\, V_{k+1}^{\text{down}}$$

with weights

$$\begin{aligned} w_{\text{up}} &= \frac{r \;-\; \text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} \;-\; \text{ret}_{\text{down}}} \;=\; \frac{-\;\text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} \;-\; \text{ret}_{\text{down}}} \\ w_{\text{down}} &= \frac{+\;\text{ret}_{\text{up}}}{\text{ret}_{\text{up}} \;-\; \text{ret}_{\text{down}}} \end{aligned}$$

If we further assume a 'symmetric' Binomial model with (say, $q = 1\%$ or $q = 5\%$)

$$\begin{aligned} \text{ret}_{\text{up}} &= +\,q \\ \text{ret}_{\text{down}} &= -\,q \end{aligned}$$

the weights simplify to

$$w_{\text{up}} \;=\; \frac{-(-q)}{2q} \;=\; \frac{1}{2} \;=\; w_{\text{down}}$$

and we arrive at the simple recursion formula

$$V_k \;=\; \frac{V_{k+1}^{\text{up}} \;+\; V_{k+1}^{\text{down}}}{2}\;. \tag{6}$$

Beispiel: Wir betrachten einen Zeithorizont von 3 Wochen und wir nehmen an, dass sich der Preis $S_k = S(t_k)$ eines Underlyings S sich nur wöchentlich ändern kann und dabei nur 2 Einstellungsmöglichkeiten hat. Das heisst genauer, wir betrachten ein 3-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess

$$S_k \quad = \quad S_{k-1} \times \begin{cases} (1+\mathrm{ret}_{\mathrm{up}}) & \text{mit W'keit } p_{\mathrm{up}} \\ (1+\mathrm{ret}_{\mathrm{down}}) & \text{mit W'keit } p_{\mathrm{down}} = 1 - p_{\mathrm{up}} \end{cases}$$

mit $k = 0, 1, 2, 3$ (und etwa $t_0 = 0$, $t_1 = 1\mathrm{week}$, $t_2 = 2\mathrm{weeks}$, $t_3 = 3\mathrm{weeks}$). Die wöchentlichen Returns seien gegeben durch

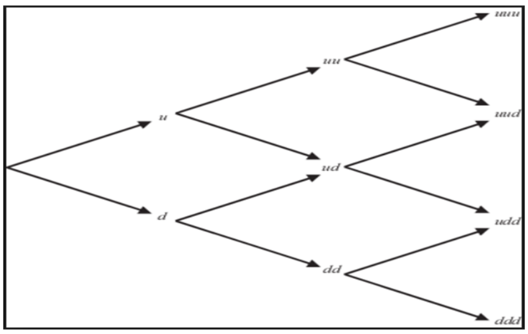
$$\begin{aligned} \mathrm{ret}_{\mathrm{up}} &= +10\% \\ \mathrm{ret}_{\mathrm{down}} &= -10\% \end{aligned}$$

und die (etwa durch eine Zeitreihenanalyse ermittelte) Wahrscheinlichkeit für einen up-move sei 60%, $p_{\mathrm{up}} = 60\%$. Weiter sei $S_0 = 100$ und wir nehmen an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$.

Sämtliche möglichen Preise in diesem Modell lassen sich durch zwei Parameter charakterisieren: Einem Zeit-Parameter $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, der uns sagt, in welcher Zeit-Periode wir gerade sind. Und einem weiteren Parameter ℓ, der uns sagt, wie viele up-moves es bis zum aktuellen Zeitpunkt gegeben hat. Also $\ell \in \{0, 1, 2, 3\}$. Der Preis $S_{k,\ell}$ zum Zeitpunkt k bei ℓ up-moves ist dann also gegeben durch

$$S_{k,\ell} \quad := \quad S_0(1+\mathrm{ret}_{\mathrm{up}})^{\ell}(1+\mathrm{ret}_{\mathrm{down}})^{k-\ell}$$

a) Machen Sie sich klar, dass alle möglichen Preise durch die folgende Binomialbaum-Struktur verdeutlicht werden können,



und tragen Sie dann an den Knotenpunkten die numerischen Werte für die jeweiligen Preise $S_{k,\ell}$ ein.

b) Betrachten Sie eine Standard-Kauf-Option (oder auch Call-Option) mit Fälligkeit $t_N = t_3 = 3\mathrm{weeks}$ und Auszahlungsfunktion

$$H_{\mathrm{call}}(S_3) \quad = \quad \max\{S_3 - S_0\,,\,0\} \tag{7}$$

Berechnen Sie den Preis dieser Option, indem Sie die Rekursionsformel (6) verwenden.

c) Berechnen Sie jetzt für jeden Knotenpunkt im Binomial-Baum das $\delta_{k,\ell}$, die Anzahl von Aktien, die man zum Zeitpunkt t_k halten muss, wenn der Aktienpreis $S_{k,\ell}$ ist, damit man den Payoff (7) replizieren kann.

d) Betrachten Sie jetzt die folgenden 2 Preis-Pfade:

$$\begin{aligned} \mathrm{Pfad}_1 &:= \{\mathrm{up}, \mathrm{up}, \mathrm{down}\} \\ \mathrm{Pfad}_2 &:= \{\mathrm{down}, \mathrm{up}, \mathrm{up}\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie jetzt explizit für diese beiden Pfade, dass die replizierende Strategie definiert durch die δ's aus Teil (c) tatsächlich die Optionsauszahlung (7) replizieren tut.