week11: Mean Reversion Prozesse: Ornstein-Uhlenbeck, Cox-Ingersoll-Ross und GARCH-Diffusion

Mean reversion Prozesse werden in der Finanzmathematik zum Modellieren von stochastischen Zinsen oder stochastischen Volatilitäten benutzt. Wir wollen uns die folgenden 3 Prozesse anschauen:

Definition 11.1: Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess oder auch OU-Prozess ν_1, der Cox-Ingersoll-Ross-Prozess oder auch CIR-Prozess (oder auch square root oder SQR-Prozess in der ökonometrischen Literatur) ν_2 und der GARCH-Diffusion-Prozess oder auch GD-Prozess ν_3 sind gegeben durch die folgenden stochastischen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} d\nu_{1,t} &= \kappa_1(\bar\nu_1 - \nu_{1,t})\,dt \;+\; \beta_1\,dx_t \\ d\nu_{2,t} &= \kappa_2(\bar\nu_2 - \nu_{2,t})\,dt \;+\; \beta_2\,\sqrt{\nu_{2,t}}\,dx_t \\ d\nu_{3,t} &= \kappa_3(\bar\nu_3 - \nu_{3,t})\,dt \;+\; \beta_3\,\nu_{3,t}\,dx_t \end{aligned} \tag{1}$$

mit Modell-Parametern $\kappa_i, \bar\nu_i$ und β_i und x_t eine Brownsche Bewegung.

In diskreter Zeit $t = t_k = k\Delta t$ ist die Brownsche Bewegung gegeben durch

$$x_{t_k} \;=\; \sqrt{\Delta t}\,\textstyle\sum_{j=1}^{k}\phi_j \tag{2}$$

mit standard-normalverteilten ϕ_j's, so dass das dx_t gegeben ist durch

$$dx_{t_k} \;:=\; x_{t_k} - x_{t_{k-1}} \;=\; \sqrt{\Delta t}\,\phi_k \tag{3}$$

Die SDEs (1) sind dann äquivalent zu den folgenden stochastischen Rekursionen:

$$\begin{aligned} \nu_{1,t_k} &= \nu_{1,t_{k-1}} \;+\; \kappa_1(\bar\nu_1 - \nu_{1,t_{k-1}})\,\Delta t \;+\; \beta_1\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \\ \nu_{2,t_k} &= \nu_{2,t_{k-1}} \;+\; \kappa_2(\bar\nu_2 - \nu_{2,t_{k-1}})\,\Delta t \;+\; \beta_2\,\sqrt{\nu_{2,t_{k-1}}}\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \\ \nu_{3,t_k} &= \nu_{3,t_{k-1}} \;+\; \kappa_3(\bar\nu_3 - \nu_{3,t_{k-1}})\,\Delta t \;+\; \beta_3\,\nu_{3,t_{k-1}}\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \end{aligned} \tag{4}$$

Die SDEs für den OU- und den GD-Prozess können explizit gelöst werden. Schauen wir uns zunächst den OU-Prozess an:

Theorem 11.1: Die SDE für den Ornstein-Uhlenbeck Prozess

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar\nu - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,dx_t \tag{5}$$

wird gelöst von

$$\nu_t \;=\; \bar{\nu} + (\nu_0 - \bar{\nu})e^{-\kappa t} \;+\; \beta \int_0^t e^{-\kappa(t-s)}\, dx_s \tag{6}$$

Beweis: Nehmen wir an, die Formel (6) wäre nicht gegeben und wir müssten sie herleiten. Wir machen den Ansatz

$$\tilde{\nu}_t \;=\; a_t\,\nu_t \;+\; b_t \tag{7}$$

mit deterministischen Funktionen a_t und b_t (das heisst, da sollen keine Zufallszahlen drin sein) und versuchen, a_t und b_t so zu wählen, dass wir für $\tilde{\nu}_t$ eine einfachere Gleichung bekommen, die wir sofort lösen können. Wir haben

$$\begin{aligned} d\tilde{\nu}_t &= \dot{a}_t\,dt\,\nu_t \;+\; a_t\,d\nu_t \;+\; \dot{b}_t\,dt \\ &= \dot{a}_t\,dt\,\nu_t \;+\; a_t\left[\,\kappa(\bar{\nu} - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,dx_t\,\right] \;+\; \dot{b}_t\,dt \\ &= \left\{\,\dot{a}_t\,\nu_t \;+\; a_t\,\kappa(\bar{\nu} - \nu_t) \;+\; \dot{b}_t\,\right\}dt \;+\; \beta\,a_t\,dx_t \end{aligned} \tag{8}$$

Wir wollen a_t und b_t so wählen, dass der Drift-Anteil der obigen Gleichung, die geschweifte Klammer vor dem dt, verschwindet. Also:

$$(\dot{a}_t \;-\; \kappa a_t)\nu_t \;+\; \kappa\bar{\nu}\,a_t \;+\; \dot{b}_t \;\overset{!}{=}\; 0 \tag{9}$$

oder

$$\dot{a}_t \;-\; \kappa a_t \;=\; 0 \tag{10}$$

$$\kappa\bar{\nu}\,a_t \;+\; \dot{b}_t \;=\; 0 \tag{11}$$

Aus Gleichung (10) folgt:

$$a_t \;=\; a_0\,e^{+\kappa t} \tag{12}$$

so dass

$$\dot{b}_t \;=\; -\,\kappa\bar{\nu}a_0\,e^{+\kappa t} \tag{13}$$

oder

$$b_t \;=\; b_0 \;-\; \bar{\nu}a_0\,(e^{+\kappa t} - 1) \tag{14}$$

Mit dieser Wahl von a_t und b_t tut die geschweifte Klammer in (37) verschwinden und die SDE für $\tilde{\nu}_t$ lautet

$$\begin{aligned} d\tilde{\nu}_t &= \beta\,a_t\,dx_t \\ &= \beta\,a_0\,e^{+\kappa t}\,dx_t \end{aligned} \tag{15}$$

und wir bekommen

$$\tilde{\nu}_t \;-\; \tilde{\nu}_0 \;=\; \beta\,a_0\,\int_0^t e^{+\kappa s}\,dx_s \tag{16}$$

Wegen

$$\tilde{\nu}_t \;=\; a_t\,\nu_t \;+\; b_t$$

ist dann

$$
\begin{aligned}
\nu_t &= \tfrac{1}{a_t}\left(\tilde{\nu}_t - b_t\right) \\
&= \tfrac{1}{a_0}\,e^{-\kappa t}\left\{\,\tilde{\nu}_0 + \beta\,a_0\int_0^t e^{+\kappa s}\,dx_s - b_0 + \bar{\nu}a_0\,(e^{+\kappa t}-1)\,\right\} \\
&= \tfrac{1}{a_0}\,e^{-\kappa t}\left\{\,\tilde{\nu}_0 + \beta\,a_0\int_0^t e^{+\kappa s}\,dx_s - b_0 + \bar{\nu}a_0\,(e^{+\kappa t}-1)\,\right\} \\
&= \beta\int_0^t e^{-\kappa(t-s)}\,dx_s + \tfrac{1}{a_0}\,e^{-\kappa t}\left\{\,\tilde{\nu}_0 - b_0 - \bar{\nu}a_0\,\right\} + \bar{\nu} \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Insbesondere,

$$\nu_0 = \tfrac{1}{a_0}\left\{\,\tilde{\nu}_0 - b_0 - \bar{\nu}a_0\,\right\} + \bar{\nu} \qquad (18)$$

und damit

$$\nu_t = \beta\int_0^t e^{-\kappa(t-s)}\,dx_s + e^{-\kappa t}\,(\nu_0-\bar{\nu}) + \bar{\nu} \qquad (19)$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

Folgerungen: **a)** Erwartungswert und Varianz eines Ornstein-Uhlenbeck Prozesses sind gegeben durch (hatten wir schon im Theorem 10.4 im week10 gezeigt)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}[\,\nu_t\,] &= \bar{\nu} + (\nu_0-\bar{\nu})e^{-\kappa t} \\
\mathsf{V}[\,\nu_t\,] &= \tfrac{\beta^2}{2\kappa}\,(1-e^{-2\kappa t})
\end{aligned}
$$

b) Als Summe von normalverteilten Zufallszahlen ist ν_t wieder normalverteilt, es gilt

$$\mathsf{Prob}\big[\,\nu_t \in (\nu,\nu+d\nu)\,\big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\frac{\beta^2}{2\kappa}\,(1-e^{-2\kappa t})}}\;\exp\left\{-\frac{\left(\nu - [\,\bar{\nu} + (\nu_0-\bar{\nu})e^{-\kappa t}\,]\right)^2}{2\,\frac{\beta^2}{2\kappa}\,(1-e^{-2\kappa t})}\right\}d\nu$$

GARCH-Diffusion:

Schauen wir uns jetzt den GARCH-Diffusion Prozess an, die SDE lautet:

$$d\nu_t = \kappa(\bar{\nu}-\nu_t)\,dt + \beta\,\nu_t\,dx_t \qquad (20)$$

Betrachten wir zunächst die SDE für $\bar{\nu}=0$,

$$d\tilde{\nu}_t = -\kappa\,\tilde{\nu}_t\,dt + \beta\,\tilde{\nu}_t\,dx_t \qquad (21)$$

Das ist von der Form her wie das Black-Scholes Modell,

$$\frac{d\tilde{\nu}_t}{\tilde{\nu}_t} = -\kappa\,dt + \beta\,dx_t \qquad (22)$$

und die Lösung ist also gegeben durch

$$\tilde{\nu}_t = \tilde{\nu}_0\;e^{\beta x_t - (\kappa+\beta^2/2)t} \qquad (23)$$

Um eine Lösung von (20) zu erhalten, machen wir dann den Ansatz

$$\nu_t \;=\; a_t\,\tilde{\nu}_t \;=\; a_t\,\tilde{\nu}_0\,e^{\beta x_t - (\kappa+\beta^2/2)t} \tag{24}$$

und wir wollen annehmen, dass müssen wir dann hinterher noch checken, dass

$$da_t\,d\tilde{\nu}_t \;\stackrel{!}{=}\; 0 \tag{25}$$

Dann bekommen wir

$$\begin{aligned} d\nu_t &= da_t\,\tilde{\nu}_t \;+\; a_t\,d\tilde{\nu}_t \\ &= da_t\,\tilde{\nu}_t \;+\; a_t\Big\{-\kappa\,\tilde{\nu}_t\,dt \;+\; \beta\,\tilde{\nu}_t\,dx_t\Big\} \\ &= da_t\,\tilde{\nu}_t \;-\; \kappa\,\nu_t\,dt \;+\; \beta\,\nu_t\,dx_t \\ &\stackrel{!}{=} \kappa(\bar{\nu}-\nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t\,dx_t \end{aligned} \tag{26}$$

und damit

$$da_t\,\tilde{\nu}_t \;=\; da_t\,\tilde{\nu}_0\,e^{\beta x_t - (\kappa+\beta^2/2)t} \;\stackrel{!}{=}\; \kappa\bar{\nu}\,dt \tag{27}$$

oder

$$da_t \;=\; \tfrac{\kappa\bar{\nu}}{\tilde{\nu}_0}\,e^{-\beta x_t + (\kappa+\beta^2/2)t}\,dt \tag{28}$$

Da gemäss (28) das da_t keinen dx_t-Anteil hat, sondern nur einen dt-Teil, ist die Gleichung (25) erfüllt. Wir integrieren (28) und bekommen

$$a_t - a_0 \;=\; \tfrac{\kappa\bar{\nu}}{\tilde{\nu}_0}\,\int_0^t e^{-\beta x_s + (\kappa+\beta^2/2)s}\,ds \tag{29}$$

und damit

$$\begin{aligned} \nu_t &= a_t\,\tilde{\nu}_t \;=\; a_t\,\tilde{\nu}_0\,e^{\beta x_t - (\kappa+\beta^2/2)t} \\ &= \Big\{a_0 \;+\; \tfrac{\kappa\bar{\nu}}{\tilde{\nu}_0}\,\int_0^t e^{-\beta x_s + (\kappa+\beta^2/2)s}\,ds\Big\}\,\tilde{\nu}_0\,e^{\beta x_t - (\kappa+\beta^2/2)t} \\ &= \nu_0\,e^{\beta x_t - (\kappa+\beta^2/2)t} \;+\; \kappa\bar{\nu}\,\int_0^t e^{+\beta(x_t-x_s) - (\kappa+\beta^2/2)(t-s)}\,ds \end{aligned} \tag{30}$$

Wir halten das Resultat in dem folgenden Theorem fest:

Theorem 11.2: Die SDE für den GARCH-Diffusion Prozess

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar{\nu}-\nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t\,dx_t \tag{31}$$

wird gelöst von

$$\nu_t \;=\; \nu_0\,e^{\beta x_t - (\kappa+\beta^2/2)t} \;+\; \kappa\bar{\nu}\,\int_0^t e^{+\beta(x_t-x_s) - (\kappa+\beta^2/2)(t-s)}\,ds \tag{32}$$

Bemerkungen:

1) Für positive $\nu_0, \bar{\nu}, \kappa$ ist der GD-Prozess offensichtlich immer positiv, für den OU-Prozess sind auch negative Werte möglich, der ist ja normalverteilt.

2) Der Erwartungswert für den GD-Prozess ist derselbe wie der für den OU-Prozess, wenn wir etwa die explizite Darstellung (32) benutzen, bekommen wir unter Berücksichtigung von

$$\mathsf{E}[\, e^{\sigma x_t - \sigma^2 t/2} \,] \;=\; 1 \tag{33}$$

das Resultat

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[\,\nu_t\,] &= \nu_0 \, \mathsf{E}\big[\, e^{\beta x_t \,-\, (\kappa+\beta^2/2)t} \,\big] \;+\; \kappa\bar{\nu} \int_0^t \mathsf{E}\big[\, e^{+\beta(x_t - x_s) \,-\, (\kappa+\beta^2/2)(t-s)} \,\big]\, ds \\
&= \nu_0 \, e^{-\kappa t} \;+\; \kappa\bar{\nu} \int_0^t e^{-\kappa(t-s)}\, ds \\
&= \nu_0 \, e^{-\kappa t} \;+\; \bar{\nu}\,(1 - e^{-\kappa t})
\end{aligned} \tag{34}$$

und das ist identisch mit dem OU-Resultat.

Für den OU- und den GD-Prozess konnten wir die stochastische Differentialgleichung explizit lösen. Für den CIR-Prozess ist keine explizite Darstellung bekannt. Nichtsdestotrotz ist es möglich, die Erwartungswerte und Varianzen der Prozesse in allen 3 Fällen explizit zu berechnen. Die Erwartungswerte werden in der zweiten Aufgabe auf dem Übungsblatt 11 berechnet. Die Rechnung für die Varianzen wollen wir uns hier jetzt noch anschauen:

Aufgabe: Für $\gamma \in \{\, 0\,,\, 1/2\,,\, 1\,\}$ sei ν_t gegeben durch

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar{\nu} - \nu_t)\, dt \;+\; \beta\, \nu_t^{\gamma}\, dx_t$$

und $E(t) = \mathsf{E}[\nu_t]$ sei der Erwartungswert von ν_t gegeben durch die Formel

$$E(t) \;=\; \mathsf{E}[\,\nu_t\,] \;=\; \nu_0\, e^{-\kappa t} \;+\; \bar{\nu}\,(1 - e^{-\kappa t})$$

Definieren wir

$$F(t) \;:=\; \mathsf{E}[\,\nu_t^2\,]$$

dann ist die Varianz von ν_t gegeben durch

$$\mathsf{V}[\nu_t] \;=\; F(t) - E(t)^2$$

a) Zeigen Sie, dass ν_t^2 folgende SDE erfüllt:

$$d(\nu_t^2) \;=\; \big[2\kappa(\bar{\nu}\,\nu_t - \nu_t^2) + \beta^2 \nu_t^{2\gamma}\big] dt \;+\; 2\beta\, \nu_t^{\gamma+1}\, dx_t \tag{35}$$

b) Folgern Sie mit Hilfe von (35): $F(t)$ erfüllt die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
\gamma = 0: \quad & F'(t) + 2\kappa F(t) &=& \; 2\kappa\bar{\nu}\, E(t) + \beta^2 \\
\gamma = 1/2: \quad & F'(t) + 2\kappa F(t) &=& \; (2\kappa\bar{\nu} + \beta^2)\, E(t) \\
\gamma = 1: \quad & F'(t) + (2\kappa - \beta^2)\, F(t) &=& \; 2\kappa\bar{\nu}\, E(t)
\end{aligned}$$

c) Die DGLs aus (b) lassen sich alle in geschlossener Form lösen. Wir betrachten lediglich den Limes $t \to \infty$. Zeigen Sie:

$$\gamma = 0: \qquad \lim_{t\to\infty} \mathsf{V}[\nu_t] \;=\; \frac{\beta^2}{2\kappa}$$

$$\gamma = 1/2: \qquad \lim_{t\to\infty} \mathsf{V}[\nu_t] \;=\; \frac{(\beta\sqrt{\bar{\nu}})^2}{2\kappa}$$

$$\gamma = 1: \qquad \lim_{t\to\infty} \mathsf{V}[\nu_t] \;=\; \begin{cases} \dfrac{(\beta\bar{\nu})^2}{2\kappa - \beta^2} & \text{falls } \beta^2 < 2\kappa \\ +\infty & \text{falls } \beta^2 > 2\kappa \end{cases}$$

Lösung: **a)** Wir haben

$$\begin{aligned}
d(\nu_t^2) &= 2\nu_t\, d\nu_t \;+\; \frac{1}{2}\, 2\, (d\nu_t)^2 \\
&= 2\nu_t \left[\, \kappa(\bar{\nu} - \nu_t)\, dt \;+\; \beta\, \nu_t^\gamma\, dx_t \,\right] \;+\; \left[\, \kappa(\bar{\nu} - \nu_t)\, dt \;+\; \beta\, \nu_t^\gamma\, dx_t \,\right]^2 \\
&= 2\nu_t \left[\, \kappa(\bar{\nu} - \nu_t)\, dt \;+\; \beta\, \nu_t^\gamma\, dx_t \,\right] \;+\; \left[\, \beta\, \nu_t^\gamma\, dx_t \,\right]^2 \\
&= 2\nu_t \left[\, \kappa(\bar{\nu} - \nu_t)\, dt \;+\; \beta\, \nu_t^\gamma\, dx_t \,\right] \;+\; \beta^2\, \nu_t^{2\gamma}\, dt \\
&= \left[2\kappa(\bar{\nu}\, \nu_t - \nu_t^2) + \beta^2 \nu_t^{2\gamma} \right] dt \;+\; 2\beta\, \nu_t^{\gamma+1}\, dx_t
\end{aligned}$$

b) Wir nehmen den Erwartungswert von (6) und bekommen:

$$\mathsf{E}\big[\, d(\nu_t^2)\,\big] \;=\; \Big\{ 2\kappa\big(\, \bar{\nu}\, \mathsf{E}[\nu_t] \;-\; \mathsf{E}[\nu_t^2] \big) \;+\; \beta^2\, \mathsf{E}[\nu_t^{2\gamma}] \,\Big\}\, dt \;+\; 0$$

Wegen

$$\mathsf{E}\big[\, d(\nu_t^2)\,\big] \;=\; d\mathsf{E}[\nu_t^2]$$

und mit den Definitionen

$$\begin{aligned}
E_t \;&\equiv\; E(t) \;:=\; \mathsf{E}[\nu_t] \\
F_t \;&\equiv\; F(t) \;:=\; \mathsf{E}[\nu_t^2]
\end{aligned}$$

liefert das dann

$$\begin{aligned}
dF_t &= \Big\{ 2\kappa\big(\, \bar{\nu}\, \mathsf{E}[\nu_t] \;-\; \mathsf{E}[\nu_t^2] \big) \;+\; \beta^2\, \mathsf{E}[\nu_t^{2\gamma}] \,\Big\}\, dt \\
&= \Big\{ 2\kappa\big(\, \bar{\nu}\, E_t \;-\; F_t \big) \;+\; \beta^2\, \mathsf{E}[\nu_t^{2\gamma}] \,\Big\}\, dt
\end{aligned}$$

oder

$$
\begin{aligned}
F_t' + 2\kappa F_t &= 2\kappa\bar{\nu}\, E_t + \beta^2\, \mathsf{E}[\nu_t^{2\gamma}] \\
&= 2\kappa\bar{\nu}\, E_t + \beta^2 \begin{cases} \mathsf{E}[1] & \text{für } \gamma = 0 \\ \mathsf{E}[\nu_t] & \text{für } \gamma = 1/2 \\ \mathsf{E}[\nu_t^2] & \text{für } \gamma = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

und damit

$$
F_t' + 2\kappa F_t = 2\kappa\bar{\nu}\, E_t + \beta^2 \begin{cases} 1 & \text{für } \gamma = 0 \\ E_t & \text{für } \gamma = 1/2 \\ F_t & \text{für } \gamma = 1 \end{cases}
$$

c) Für den Limes $t \to \infty$ ersetzen wir das E_t durch

$$
\lim_{t\to\infty} E_t = \lim_{t\to\infty} \left\{ \bar{\nu} + (\nu_0 - \bar{\nu})\, e^{-\kappa t} \right\} = \bar{\nu}
$$

und bekommen die folgenden DGLs: Für $\gamma = 0$,

$$
F_t' + 2\kappa F_t = 2\kappa\bar{\nu}^2 + \beta^2 \tag{36}
$$

Für $\gamma = 1/2$,

$$
F_t' + 2\kappa F_t = 2\kappa\bar{\nu}^2 + \beta^2\bar{\nu} \tag{37}
$$

Und für $\gamma = 1$,

$$
F_t' + 2\kappa F_t = 2\kappa\bar{\nu}^2 + \beta^2 F_t
$$

oder

$$
F_t' + (2\kappa - \beta^2)\, F_t = 2\kappa\bar{\nu}^2 \tag{38}
$$

(36-38) sind lineare, inhomogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Die Lösung ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung plus eine partikuläre oder spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist für $\gamma \in \{0, 1/2, 1\}$, in der Reihenfolge,

$$
F_t = c_1\, e^{-2\kappa t} \tag{39}
$$

$$
F_t = c_2\, e^{-2\kappa t} \tag{40}
$$

$$
F_t = c_3\, e^{-(2\kappa-\beta^2)t} \tag{41}
$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist, wieder für $\gamma \in \{0, 1/2, 1\}$, in der Reihenfolge,

$$
F_t = \tfrac{2\kappa\bar{\nu}^2+\beta^2}{2\kappa} \tag{42}
$$

$$
F_t = \tfrac{2\kappa\bar{\nu}^2+\beta^2\bar{\nu}}{2\kappa} \tag{43}
$$

$$
F_t = \tfrac{2\kappa\bar{\nu}^2}{2\kappa-\beta^2} \tag{44}
$$

Im Limes $t \to \infty$ geht der homogene Anteil nach 0, im Fall $\gamma = 1$ nur für $2\kappa > \beta^2$, so dass

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \mathsf{V}[\nu_t] &= \lim_{t\to\infty} \left\{ F_t - E_t^2 \right\} \\
&= \lim_{t\to\infty} F_t - \bar{\nu}^2 \\
&= \begin{cases} \bar{\nu}^2 + \frac{\beta^2}{2\kappa} - \bar{\nu}^2 \\ \bar{\nu}^2 + \frac{\beta^2 \bar{\nu}}{2\kappa} - \bar{\nu}^2 \\ \frac{2\kappa\bar{\nu}^2}{2\kappa - \beta^2} - \bar{\nu}^2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{\beta^2}{2\kappa} \\ \frac{\beta^2 \bar{\nu}}{2\kappa} \\ \frac{2\kappa\bar{\nu}^2 - \bar{\nu}^2(2\kappa - \beta^2)}{2\kappa - \beta^2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{\beta^2}{2\kappa} & \text{für } \gamma = 0 \\ \frac{\beta^2 \bar{\nu}}{2\kappa} & \text{für } \gamma = 1/2 \\ \frac{\bar{\nu}^2 \beta^2}{2\kappa - \beta^2} & \text{für } \gamma = 1 \end{cases} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$