

week10: Der Ornstein Uhlenbeck Prozess in diskreter Zeit

Wir diskretisieren das Zeitintervall $[0, T]$ mit einem Δt gemäss

$$[0, T] \approx \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t\} =: \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

mit $t_k = k\Delta t$ und einer End-Zeit $T = t_n = n\Delta t$ so dass wir also $n = T/\Delta t$ Zeitpunkte haben (oder $n + 1$ mit dem $t_0 = 0$). In jedem Zeitpunkt $t_k = k\Delta t$ ziehen wir eine neue, standard-normalverteilte Zufallszahl ϕ_k , die dann am Ende gegen die Dichte der Standard-Normalverteilung

$$e^{-\frac{\phi_k^2}{2}} \frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}}$$

integriert werden soll. Ein allgemeiner stochastischer Prozess oder genauer eine allgemeine Ito-Diffusion in diskreter Zeit

$$\{X_{t_k}\}_{k=0}^n$$

ist dann typischerweise gegeben durch eine Rekursion von der Form

$$X_{t_k} = X_{t_{k-1}} + a(X_{t_{k-1}}, t_{k-1}) \Delta t + b(X_{t_{k-1}}, t_{k-1}) \sqrt{\Delta t} \phi_k \quad (1)$$

wobei der Startwert $X_{t_0} = x_0$ eine fest vorgegebene Zahl ist. Erinnern wir uns zunächst noch einmal daran, warum wir als Vorfaktor vor dem ϕ_k auf der rechten Seiten von (1) ein $\sqrt{\Delta t}$ brauchen, aber kein Δt . Dazu das erste

Beispiel 1 (Brownsche Bewegung): Wir wählen

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

und bekommen so die Rekursion

$$X_{t_k} = X_{t_{k-1}} + \sqrt{\Delta t} \phi_k \quad (2)$$

Die können wir explizit lösen:

$$X_{t_k} = X_{t_0} + \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j \quad (3)$$

Eine standard Brownsche Bewegung hat den Startwert $X_{t_0} := 0$ und wir wollen sie im folgenden mit einem kleinem x_{t_k} bezeichnen, also

$$x_{t_k} := \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j \quad (4)$$

Wieso steht da ein $\sqrt{\Delta t}$? Wir müssen uns an das folgende Theorem aus der Stochastik erinnern:

Theorem 10.1: Es seien $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ normalverteilte Zufallsvariablen mit Mittelwerten $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ und Standardabweichungen $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Dann gilt: Die Summe

$$\phi := \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n$$

ist normalverteilt mit Mittelwert

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \quad (5)$$

und Varianz

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \quad (6)$$

oder Standardabweichung

$$\sigma = \{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \}^{1/2}$$

Das heisst genauer, für eine beliebige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\phi_1 + \dots + \phi_n) \prod_{k=1}^n e^{-\frac{(\phi_k - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}} \frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} = \int_{\mathbb{R}} f(\phi) e^{-\frac{(\phi - \mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \quad (7)$$

mit μ und σ^2 gegeben durch (5) und (6).

Wenn wir die Brownsche Bewegung in (4) etwa folgendermassen schreiben,

$$x_{t_k} = \sqrt{\Delta t} s_k \quad (8)$$

$$s_k := \sum_{j=1}^k \phi_j \quad (9)$$

dann ist das s_k also einfach eine Summe von k standard normalverteilten Zufallszahlen. Nach dem Theorem 10.1 gilt dann: Das s_k ist wieder normalverteilt mit Mittelwert

$$\mu_{s_k} = E[s_k] = \underbrace{0 + \dots + 0}_{k \text{ Stueck}} = 0 \quad (10)$$

und Varianz

$$\sigma_{s_k}^2 = V[s_k] = \underbrace{1 + \dots + 1}_{k \text{ Stueck}} = k \quad (11)$$

Die Brownsche Bewegung

$$x_{t_k} = \sqrt{\Delta t} s_k = \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j \quad (12)$$

ist dann also eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert

$$\mathbb{E}[x_{t_k}] = 0 \quad (13)$$

und Varianz

$$\mathbb{V}[x_{t_k}] = \mathbb{V}[\sqrt{\Delta t} s_k] = (\sqrt{\Delta t})^2 \mathbb{V}[s_k] = \Delta t k = t_k \quad (14)$$

Mit anderen Worten, die Varianz hat einen wohldefinierten, nichttrivialen Grenzwert im Kontinuumsimes $\Delta t \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ mit $t_k = k\Delta t =: t$ fest, nämlich $\mathbb{V}[x_t] = t$. Wenn wir anstatt $\sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j$ etwa eine Summe

$$\tilde{x}_{t_k} := \Delta t \sum_{j=1}^k \phi_j \quad (15)$$

definiert hätten, würden wir auf

$$\mathbb{V}[\tilde{x}_{t_k}] = \mathbb{V}[\Delta t s_k] = (\Delta t)^2 \mathbb{V}[s_k] = (\Delta t)^2 k = \Delta t t_k \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0 \quad (16)$$

kommen und wir hätten im wesentlichen im Limes $\Delta t \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ mit $t_k = k\Delta t =: t$ fest

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \tilde{x}_t = 0 \quad (17)$$

Definieren wir noch ein Δx_t für die Brownsche Bewegung (4) durch

$$\Delta x_{t_k} := x_{t_k} - x_{t_{k-1}} \stackrel{(4)}{=} \sqrt{\Delta t} \phi_k \quad (18)$$

dann können wir die Rekursion in (1) auch folgendermassen schreiben:

$$X_{t_k} = X_{t_{k-1}} + a(X_{t_{k-1}}, t_{k-1}) \Delta t + b(X_{t_{k-1}}, t_{k-1}) \Delta x_{t_k} \quad (19)$$

oder

$$\Delta X_{t_k} := X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = a(X_{t_{k-1}}, t_{k-1}) \Delta t + b(X_{t_{k-1}}, t_{k-1}) \Delta x_{t_k} \quad (20)$$

Eine Rekursion in der Form (20) wird dann auch als stochastische Differentialgleichung bezeichnet, im Kontinuumsimes benutzt man die Notation

$$dX_t = a(X_t, t) dt + b(X_t, t) dx_t \quad (21)$$

wobei die genaue Definition von (21) durch (20) gegeben ist. Bevor wir jetzt den Ornstein-Uhlenbeck Prozess hinschreiben, machen wir eben noch ein zweites

Beispiel 2 (deterministische DGL): Wir wählen

$$b = 0 \quad (22)$$

und

$$a(X, t) = a(X) = \kappa(\mu - X) \quad (23)$$

mit Konstanten κ und μ . Dann bekommen wir die Rekursion

$$\Delta X_{t_k} = \kappa(\mu - X_{t_{k-1}}) \Delta t \quad (24)$$

oder

$$\frac{\Delta X_{t_k}}{\Delta t} = \kappa(\mu - X_{t_{k-1}}) \quad (25)$$

Im Kontinuumslimites $\Delta t \rightarrow 0$ wird das zu

$$X'(t) = \frac{dX}{dt} = \kappa(\mu - X) \quad (26)$$

Das ist dann einfach eine gewöhnliche DGL, die wir mit Trennung der Variablen lösen können:

$$\frac{dX}{\mu - X} = \kappa dt$$

oder

$$\int_{X_0}^{X_t} \frac{dX}{\mu - X} = -\log[\mu - X] \Big|_{X_0}^{X_t} = -\log \frac{\mu - X_t}{\mu - X_0} = \kappa t$$

oder

$$\mu - X_t = (\mu - X_0) e^{-\kappa t}$$

und damit

$$X_t = \mu + (X_0 - \mu) e^{-\kappa t} \quad (27)$$

Die Rekursion (24) ist noch hinreichend einfach, so dass man sogar für festes Δt , also nicht nur im Limes $\Delta t \rightarrow 0$, eine explizite Lösung erhält. Es gilt das folgende

Lemma 10.2: a) Gegeben sei die Zahl α und die Zahlenfolge $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$. Dann gilt: Die Rekursion

$$x_k = \alpha x_{k-1} + c_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

mit Startwert x_0 wird gelöst von

$$x_k = \alpha^k x_0 + \sum_{j=1}^k c_j \alpha^{k-j}$$

b) Die Rekursion

$$\Delta X_{t_k} = X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = \kappa(\mu - X_{t_{k-1}}) \Delta t \quad (28)$$

wird gelöst von

$$X_{t_k} = \mu + (X_0 - \mu)(1 - \kappa\Delta t)^k = \mu + (X_0 - \mu)\left(1 - \frac{\kappa t_k}{k}\right)^k \quad (29)$$

Beweis: a) Mit Induktion: Für $k = 1$ haben wir

$$x_1 = \alpha^1 x_0 + \sum_{j=1}^1 c_j \alpha^{1-j} = \alpha x_0 + c_1$$

und das ist korrekt. Die Formel gelte für k . Dann bekommen wir

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \alpha x_k + c_{k+1} \\ &= \alpha \left\{ \alpha^k x_0 + \sum_{j=1}^k c_j \alpha^{k-j} \right\} + c_{k+1} \\ &= \alpha^{k+1} x_0 + \sum_{j=1}^k c_j \alpha^{k+1-j} + c_{k+1} \\ &= \alpha^{k+1} x_0 + \sum_{j=1}^{k+1} c_j \alpha^{k+1-j} \end{aligned}$$

Damit ist der Teil (a) bewiesen.

b) Die Rekursion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} X_{t_k} &= X_{t_{k-1}} + \kappa(\mu - X_{t_{k-1}}) \Delta t \\ &= (1 - \kappa\Delta t) X_{t_{k-1}} + \kappa\mu \Delta t \end{aligned}$$

Wir können also den Teil (a) anwenden mit

$$\begin{aligned} \alpha &:= 1 - \kappa\Delta t \\ c_k &= c := \kappa\mu \Delta t \end{aligned}$$

und bekommen die explizite Darstellung

$$\begin{aligned} X_{t_k} &= \alpha^k X_0 + \sum_{j=1}^k c \alpha^{k-j} \\ &= \alpha^k X_0 + c \sum_{\ell=0}^{k-1} \alpha^\ell \\ &= \alpha^k X_0 + c \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

mit

$$\frac{c}{1-\alpha} = \frac{\kappa \mu \Delta t}{\kappa \Delta t} = \mu \quad (30)$$

Also,

$$X_{t_k} = \alpha^k x_0 + \mu (1 - \alpha^k) = \mu + \alpha^k (x_0 - \mu)$$

und Teil (b) ist bewiesen. ■

Jetzt können wir den zeitdiskreten Ornstein-Uhlenbeck Prozess definieren:

Definition 10.3 (OU-Prozess in diskreter Zeit): Ein zeitdiskreter Ornstein-Uhlenbeck Prozess $\{X_{t_k}\}_{k=1}^n$ ist gegeben durch die stochastische Rekursion

$$X_{t_k} = X_{t_{k-1}} + \kappa(\mu - X_{t_{k-1}}) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k \quad (31)$$

wobei die $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ unabhängige, standard-normalverteilte Zufallszahlen sind.

Wir können das Lemma 10.2 anwenden und bekommen die folgende explizite Darstellung in diskreter Zeit:

Theorem 10.4 (explizite Darstellung für den OU-Prozess): Die Rekursion (31) für den zeitdiskreten Ornstein-Uhlenbeck Prozess wird gelöst von

$$X_{t_k} = \mu + (X_0 - \mu) (1 - \kappa \Delta t)^k + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j (1 - \kappa \Delta t)^{k-j} \quad (32)$$

Insbesondere ist jedes X_{t_k} normalverteilt mit

$$\mathbb{E}[X_{t_k}] = \mu + (X_0 - \mu) (1 - \kappa \Delta t)^k \quad (33)$$

$$\mathbb{V}[X_{t_k}] = \frac{\sigma^2}{\kappa} \frac{1 - (1 - \kappa \Delta t)^{2k}}{2 - \kappa \Delta t} \quad (34)$$

Im Kontinuumslimites $\Delta t \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ mit $t_k = k \Delta t =: t$ fest ergibt sich:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E}[X_{t_k}] = \mu + (X_0 - \mu) e^{-\kappa t} \quad (35)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{V}[X_{t_k}] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}) \quad (36)$$

Beweis: Die Rekursion ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
X_{t_k} &= X_{t_{k-1}} + \kappa(\mu - X_{t_{k-1}}) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k \\
&= (1 - \kappa \Delta t) X_{t_{k-1}} + \kappa \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k \\
&=: \alpha X_{t_{k-1}} + c_k
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\alpha &:= 1 - \kappa \Delta t \\
c_k &:= \kappa \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k
\end{aligned}$$

Wir können den Teil (a) vom Lemma 10.2 anwenden und bekommen die explizite Darstellung

$$\begin{aligned}
X_{t_k} &= \alpha^k X_0 + \sum_{j=1}^k c_j \alpha^{k-j} \\
&= \alpha^k X_0 + \sum_{j=1}^k (\kappa \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_j) \alpha^{k-j} \\
&= \alpha^k X_0 + \kappa \mu \Delta t \sum_{\ell=0}^{k-1} \alpha^\ell + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j \alpha^{k-j} \\
&= \alpha^k X_0 + \kappa \mu \Delta t \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha} + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j \alpha^{k-j}
\end{aligned}$$

mit

$$\frac{\kappa \mu \Delta t}{1 - \alpha} = \frac{\kappa \mu \Delta t}{\kappa \Delta t} = \mu$$

Also,

$$\begin{aligned}
X_{t_k} &= \alpha^k X_0 + \mu (1 - \alpha^k) + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j \alpha^{k-j} \\
&= \mu + \alpha^k (x_0 - \mu) + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j \alpha^{k-j}
\end{aligned}$$

mit $\alpha = 1 - \kappa \Delta t$. Damit ist die Gleichung (32) gezeigt.

Da die ϕ_j unabhängige, standard-normalverteilte Zufallszahlen sind, gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi_j] &= 0 \\
\mathbb{E}[\phi_j \phi_k] &= \delta_{j,k}
\end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{t_k}] &= \mu + \alpha^k (x_0 - \mu) + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \mathbb{E}[\phi_j] \alpha^{k-j} \\
&= \mu + \alpha^k (x_0 - \mu)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
V[X_{t_k}] &= E\left[\left(X_{t_k} - E[X_{t_k}]\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j \alpha^{k-j}\right)^2\right] \\
&= \sigma^2 \Delta t \sum_{i,j=1}^k E[\phi_i \phi_j] \alpha^{k-i} \alpha^{k-j} \\
&= \sigma^2 \Delta t \sum_{i,j=1}^k \delta_{i,j} \alpha^{k-i} \alpha^{k-j} \\
&= \sigma^2 \Delta t \sum_{j=1}^k (\alpha^2)^{k-j} = \sigma^2 \Delta t \sum_{\ell=0}^{k-1} (\alpha^2)^\ell \\
&= \sigma^2 \Delta t \frac{1 - \alpha^{2k}}{1 - \alpha^2} = \sigma^2 \Delta t \frac{1 - \alpha^{2k}}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} \\
&= \sigma^2 \Delta t \frac{1 - (1 - \kappa \Delta t)^{2k}}{\kappa \Delta t (2 - \kappa \Delta t)} = \frac{\sigma^2}{\kappa} \frac{1 - (1 - \kappa \Delta t)^{2k}}{2 - \kappa \Delta t}
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\alpha^k &= (1 - \kappa \Delta t)^k = \left(1 - \frac{\kappa k \Delta t}{k}\right)^k = \left(1 - \frac{\kappa t_k}{k}\right)^k \\
&\stackrel{t_k = t \text{ fest}}{=} \left(1 - \frac{\kappa t}{k}\right)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e^{-\kappa t}
\end{aligned}$$

bekommen wir dann im Limes $\Delta t \rightarrow 0$ oder $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} E[X_t] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \mu + \alpha^k (x_0 - \mu) \right\} \\
&= \mu + (x_0 - \mu) e^{-\kappa t}
\end{aligned}$$

und

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} V[X_t] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sigma^2}{\kappa} \frac{1 - (1 - \kappa \Delta t)^{2k}}{2 - \kappa \Delta t} = \frac{\sigma^2}{\kappa} \frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2} = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t})$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Continuous Time Notation

Die Rekursion für den OU-Prozess war

$$X_{t_k} = X_{t_{k-1}} + \kappa(\mu - X_{t_{k-1}}) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k$$

Mit

$$\begin{aligned}\Delta X_{t_k} &:= X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \\ \Delta x_{t_k} &:= x_{t_k} - x_{t_{k-1}} = \sqrt{\Delta t} \phi_k\end{aligned}$$

können wir dann auch schreiben

$$\Delta X_{t_k} = \kappa(\mu - X_{t_{k-1}}) \Delta t + \sigma \Delta x_{t_k}$$

In stetiger Zeit benutzt man dann die Notation

$$dX_t = \kappa(\mu - X_t) dt + \sigma dx_t$$

Und die Lösung

$$\begin{aligned}X_{t_k} &= \mu + (X_0 - \mu)(1 - \kappa\Delta t)^k + \sigma\sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j (1 - \kappa\Delta t)^{k-j} \\ &= \mu + (X_0 - \mu)\left(1 - \frac{\kappa}{1/\Delta t}\right)^{t_k/\Delta t} + \sigma \sum_{j=1}^k \Delta x_{t_j} \left(1 - \frac{\kappa}{1/\Delta t}\right)^{(t_k - t_j)/\Delta t}\end{aligned}$$

wird dann im Limes $\Delta t \rightarrow 0$, mit $t := t_k$ und $s := t_j$

$$X_t = \mu + (X_0 - \mu)e^{-\kappa t} + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dx_s$$