Hochschule RheinMain SS 2025
Prof. Dr. D. Lehmann

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Wir betrachten eine All-Time-High Option mit Payoff

$$H_{\text{ATH}}\big(\{S_t\}_{0\leq t\leq T}\big) \;:=\; \max_{0\leq t\leq T} S_t$$

im Black-Scholes Modell. In der Vorlesung wurde die folgende Pricing-Formel für den Zeit-t-Preis V_t hergeleitet:

$$V_t \;=\; e^{-r\tau}\Big\{M_t\,N(d_1) \;+\; e^{r\tau}\,S_t\,N(d_{0,+}) \;+\; \tfrac{1}{\kappa}\Big[e^{r\tau}\,S_t\,N(d_{0,+}) \;-\; S_t^{1-\kappa}\,M_t^{\kappa}\,N(d_{0,-})\Big]\Big\} \tag{1}$$

Dabei ist $M_t := \max_{0\leq s\leq t} S_s$ das aktuelle, bis zur Zeit t realisierte Maximum, $\tau = T - t$ ist die Restlaufzeit, $\kappa = \frac{2r}{\sigma^2}$ und die d's sind wie folgt definiert:

$$d_1 \;:=\; \frac{\log\Big[\frac{M_t}{S_t}\Big] + (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_{0,\pm} \;:=\; \frac{\log\Big[\frac{S_t}{M_t}\Big] + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \;\pm\; \tfrac{r}{\sigma}\sqrt{\tau}$$

Weiterhin wurde gezeigt, dass sich die Formel (1) im Limes Zinsen $r \to 0$ auf die folgende Formel (2) reduziert:

$$V_t \;=\; M_t\,N(d) \;+\; S_t\Big\{\,N(d_0)\Big(1 \,+\, \tfrac{\sigma^2\tau}{2} \,-\, \log\big[\tfrac{M_t}{S_t}\big]\Big) \;+\; N'(d_0)\,\sigma\sqrt{\tau}\,\Big\} \tag{2}$$

mit den folgenden d's:

$$d \;:=\; \lim_{r\to 0} d_1 \;=\; \frac{\log[\frac{M_t}{S_t}] + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\,,$$

$$d_0 \;:=\; \lim_{r\to 0} d_{0,\pm} \;=\; \frac{\log[\frac{S_t}{M_t}] + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\,.$$

Öffnen Sie ein Excel-Sheet und betrachten Sie die folgenden Punkte:

a) Implementieren Sie die Formeln (1) und (2) in VBA, so dass sie dann als benutzerdefinierte Funktionen auf dem Excel-Sheet verwendet werden können.

b) Überprüfen Sie numerisch, dass die Formel (2) tatsächlich der $r \to 0$ Limes der Formel (1) ist.

c) Plotten Sie den Zeit-0-Preis V_0 als Funktion von $\sigma \in [0\%, 100\%]$. Wählen Sie dazu etwa die folgenden Parameterwerte: $S_0 = 100$, $T = 4$ und $r = 0$.