

6. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

1. Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, $dW(\{x_t\}_{0 < t \leq T})$ sei das Wiener-Maß und der Erwartungswert bezüglich W sei gegeben durch $E[f] = \int f(\{x_t\}) dW(\{x_t\}_{0 < t \leq T})$.

a) Berechnen Sie folgende Erwartungswerte ($0 < t \leq T$):

a1) $E[x_t]$

a2) $E[x_t^2]$

a3) $E[x_t^n]$ mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Erinnern Sie sich dazu an die Formeln für Gauss'sche Integrale aus der Finanzmathematik I, die hatten wir uns im Ü-Blatt5 angeschaut:

<https://hsrm-mathematik.de/WS2324/master/Finanzmathematik1/ueb5.pdf>

b) Berechnen Sie die Varianz $V[x_t]$ und die Standardabweichung $\sqrt{V[x_t]}$ und skizzieren Sie die Standardabweichung als Funktion von $t \in [0, T]$ etwa für $T = 4$.

Da sämtliche zu berechnenden Größen von der Form $\int f(x_t) dW(\{x_t\}_{0 < t \leq T})$ sind und nicht etwa $\int f(x_{t_1}, x_{t_2}) dW(\{x_t\}_{0 < t \leq T})$, können Sie hier das Theorem 6.1 aus der Vorlesung mit $m = 1$ anwenden.

2. Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, $dW(\{x_t\}_{0 < t \leq T})$ sei das Wiener-Maß und $E[\cdot]$ bezeichne den Erwartungswert bezüglich des Wiener-Maßes. Weiter sei $\{S_t\}_{t \geq 0}$ der Preisprozess des Black-Scholes Modells, gegeben durch

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma x_t - \frac{\sigma^2}{2} t}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert $E[S_t]$ und die Varianz $V[S_t]$. Benutzen Sie dazu wieder das Theorem 6.1 aus der Vorlesung mit $m = 1$.