Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2025

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Es sei $H = H(S_T)$ die Optionsauszahlung einer pfadunabhängigen Option im Black-Scholes Modell. Der Zeit t Preis V_t einer solchen Option ist dann gegeben durch die Formel

$$V_t \;=\; e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} H\big(S_t\, e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}x}\big)\; e^{-\frac{x^2}{2}}\;\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \tag{1}$$

Für eine Standard-Kauf-Option (Call-Option) und eine Standard-Verkaufs-Option (Put-Option) mit Payoffs

$$H_{\text{call}}(S_T) \;=\; \max\{S_T - K, 0\} \tag{2}$$
$$H_{\text{put}}(S_T) \;=\; \max\{K - S_T, 0\} \tag{3}$$

lässt sich das Integral (1) auf die $N(x)$-Funktion zurückführen, die war gegeben durch

$$N(x) \;:=\; \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\;\frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \tag{4}$$

In der FM1-Vorlesung hatten wir dazu die Black-Scholes Formeln hergeleitet, die Preise von Call- und Put-Optionen lassen sich schreiben als

$$V_{\text{call},t} \;=\; +\,S_t\,N(+d_+) \;-\; K\,e^{-r(T-t)}\,N(+d_-) \tag{5}$$

$$V_{\text{put},t} \;=\; -\,S_t\,N(-d_+) \;+\; K\,e^{-r(T-t)}\,N(-d_-) \tag{6}$$

mit

$$d_\pm \;:=\; \frac{\log\frac{S_t}{K} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{7}$$

a) Implementieren Sie die Formeln (5) und (6) in VBA, so dass diese dann auf einem Excelsheet etwa mit dem Aufruf `BSPrice(...)` benutzt werden können.

b) Berechnen Sie die Preise (5) und (6) mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation, indem Sie die Darstellung (1) benutzen und standard-normalverteilte Zufallszahlen verwenden.

Anstatt zweier separater Parameter t und T wählen Sie die Restlaufzeit $\tau := T - t$ jeweils als Input-Parameter.