Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2025

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik II
(Auffrischung Finanzmathematik I)

1. Aufgabe: Eine Brownsche Bewegung $x_t = x_{t_k}$ in diskreter Zeit $t_k = k\Delta t$ ist gegeben durch die Kombination von Zufallszahlen

$$x_{t_k} \;:=\; \sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k}\phi_j \tag{1}$$

wobei die ϕ_j standard normalverteilte Zufallszahlen sind. Simulieren Sie, sagen wir, $n = 50$ Pfade einer Brownschen Bewegung auf einem Excelsheet und plotten Sie sie in einem Diagramm. Wählen Sie dazu etwa $\Delta t = 0.01$ und einen Zeithorizont von $T = t_N = N\Delta t = 10$.

2. Aufgabe: Es sei

$$\Delta x_{t_k} \;:=\; x_{t_k} - x_{t_{k-1}} \;=\; \sqrt{\Delta t}\,\phi_k$$

In dem week2b.pdf hatten wir die folgende Grösse betrachtet,

$$I_{t_k} \;:=\; \sum_{j=1}^{k}(\,\Delta x_{t_j}\,)^2 \;=\; \Delta t\,\sum_{j=1}^{k}\phi_j^2 \tag{2}$$

die auch als quadratische Variation der Brownschen Bewegung bezeichnet wird. Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten Excel/VBA-Simulation, dass diese Grösse im Limes $\Delta t \to 0$ deterministisch wird, es gilt für jedes $\varepsilon > 0$ im Limes $\Delta t \to 0$ mit $t_k = k\Delta t = t$ fest

$$\lim_{\Delta t\to 0}\mathsf{Prob}\big[\,|I_{t_k} - t_k| \,>\, \varepsilon\,\big] \;=\; 0$$

oder etwas intuitiver geschrieben

$$\lim_{\Delta t\to 0} I_{t_k} \;=\; t_k \tag{3}$$

Plotten Sie dazu I_{t_k} als Funktion von t_k in einem (t_k, I_{t_k}) Diagramm. Wählen Sie wieder einen Zeithorizont von $T = t_N = N\Delta t = 10$ und variieren Sie dann das Δt.

3. Aufgabe: Das Black-Scholes Modell ist gegeben durch die stochastische Differentialgleichung

$$\frac{dS_t}{S_t} \;=\; \mu\,dt \,+\, \sigma\,dx_t \tag{4}$$

mit x_t eine Brownsche Bewegung. In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass (4) durch den Ausdruck

$$S_t \;=\; S_0\, e^{\sigma\, x_t \,+\, (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\, t} \tag{5}$$

gelöst wird. Überprüfen Sie dieses Resultat mit Hilfe einer geeigneten Excel/VBA-Simulation. Diskretisieren Sie dazu die SDE (4),

$$\frac{\Delta S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}} \;=\; \frac{S_{t_k} - S_{t_{k-1}}}{S_{t_{k-1}}} \;=\; \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\Delta x_{t_k} \;=\; \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\sqrt{\Delta t}\;\phi_k$$

und lösen Sie dann nach S_{t_k} auf, so dass Sie eine Formel zur rekursiven Berechnung der Asset-Preise $\{\, S_{t_k}\,\}_{k=0}^{N}$ bekommen:

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}}\left(1 \,+\, \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\sqrt{\Delta t}\;\phi_k\right) \tag{6}$$

Wählen Sie wieder einen Zeithorizont von $T = t_N = N\Delta t = 10$, etwa $\Delta t = 0.01$ und die folgenden Parameterwerte

$$\begin{aligned} \mu &= 3\% \\ \sigma &= 20\% \end{aligned}$$

und plotten Sie dann die numerische Lösung der Rekursion (6) sowie die S_{t_k} gegeben durch die direkte Formel (5) in einem Diagramm.