Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2025

11. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess oder auch OU-Prozess ν_1, der Cox-Ingersoll-Ross-Prozess oder auch CIR-Prozess (oder auch square root oder SQR-Prozess in der ökonometrischen Literatur) ν_2 und der GARCH-Diffusion-Prozess ν_3 sind gegeben durch die folgenden stochastischen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} d\nu_{1,t} &= \kappa_1(\bar{\nu}_1 - \nu_{1,t})\,dt \;+\; \beta_1\,dx_t & (1)\\ d\nu_{2,t} &= \kappa_2(\bar{\nu}_2 - \nu_{2,t})\,dt \;+\; \beta_2\,\sqrt{\nu_{2,t}}\,dx_t & (2)\\ d\nu_{3,t} &= \kappa_3(\bar{\nu}_3 - \nu_{3,t})\,dt \;+\; \beta_3\,\nu_{3,t}\,dx_t & (3) \end{aligned}$$

mit Modell-Parametern $\kappa_i, \bar{\nu}_i$ und β_i und x_t eine Brownsche Bewegung. Simulieren Sie die Prozesse $\nu_{1,t}, \nu_{2,t}$ und $\nu_{3,t}$ mit Hilfe einer Excel-Simulation. Wählen Sie dazu etwa folgende Parameter-Werte:

$$\begin{aligned} \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 &= 3 & (4)\\ \bar{\nu}_1 = \bar{\nu}_2 = \bar{\nu}_3 &= 4\% & (5) \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} \beta_3 &= 2\\ \beta_2 := \beta_3\sqrt{\bar{\nu}} &= 0.4 \qquad (6)\\ \beta_1 := \beta_3\bar{\nu} &= 8\% \end{aligned}$$

mit den Start-Werten $\nu_{i,t=0} = \bar{\nu} = 4\%$. Variieren Sie dann insbesondere für den CIR-Prozess das β_2 und schauen Sie sich die Pfade für die beiden Fälle

$$\kappa_2\bar{\nu}_2 \;>\; \beta_2^2/2 \qquad \text{und} \qquad \kappa_2\bar{\nu}_2 \;<\; \beta_2^2/2 \tag{7}$$

an.

2.Aufgabe: Die stochastischen Differentialgleichungen für den OU-Prozess ν_1, den CIR-Prozess ν_2 und den GD-Prozess ν_3 aus Aufgabe 1 können wir etwas kompakter schreiben als

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar{\nu} - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t^{\gamma}\,dx_t \tag{8}$$

mit $\gamma \in \{\,0\,,\,1/2\,,\,1\,\}$. Es sei $E(t) := \mathsf{E}[\nu_t]$ der Erwartungswert von ν_t. Zeigen Sie:

a) $E(t)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$E'(t) \;=\; \kappa\big(\bar{\nu} - E(t)\big)$$

b) Folgern Sie aus (a): Für den OU-, CIR- und GD-Prozess gilt:

$$E(t) \;=\; \bar{\nu} + (\nu_0 - \bar{\nu})\, e^{-\kappa t}\,. \tag{9}$$