

10. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

Aufgabe 1) Überprüfen Sie mit einer geeigneten Excel/VBA Simulation, dass die stochastische Rekursion für den Ornstein-Uhlenbeck Prozess,

$$X_{t_k} = X_{t_{k-1}} + \kappa(\mu - X_{t_{k-1}}) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k$$

tatsächlich durch den expliziten Ausdruck

$$X_{t_k} = \mu + (X_0 - \mu) (1 - \kappa \Delta t)^k + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j (1 - \kappa \Delta t)^{k-j}$$

gelöst wird.

Aufgabe 2) Überprüfen Sie mit Hilfe einer geeigneten Excel/VBA Simulation, dass der Erwartungswert und die Varianz eines Ornstein-Uhlenbeck Prozesses für hinreichend kleine Zeitschritte $\Delta t \rightarrow 0$ tatsächlich durch die Größen

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu + (X_0 - \mu) e^{-\kappa t}$$

$$\mathbb{V}[X_t] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t})$$

gegeben sind. Berechnen Sie dazu den Erwartungswert $\mathbb{E}[X_t]$ und die Varianz

$$\mathbb{V}[X_t] = \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}[X_t])^2\right]$$

mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation. Das heisst, simulieren Sie etwa 1000 oder 10000 OU-Pfade und berechnen Sie dann die auftretenden Erwartungswerte als Mittelwerte über alle simulierten Pfade.