Lösungen 8. Übungsblatt
Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Mit der Formel aus Theorem 8.1 bekommen wir:

$$V_{\text{Barrier}}(S_0,0) \;=\; V_{\text{Call},K}(S_0,0) - \big(\tfrac{S_0}{B}\big)^{1-\kappa}\, V_{\text{Call},K}\big(\tfrac{B^2}{S_0},0\big)$$

mit

$$\kappa \;=\; \frac{2r}{\sigma^2} \;\overset{r=0}{=}\; 0$$

und den Standard-Call-Preisen

$$\begin{aligned} V_{\text{Call},K}(S_0,0) &= S_0\, N(d_+) \,-\, Ke^{-rT} N(d_-) \\ V_{\text{Call},K}(B^2/S_0,0) &= B^2/S_0\, N(\tilde d_+) \,-\, Ke^{-rT} N(\tilde d_-) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} d_\pm &= \frac{\log\big[\frac{S_0}{K}\big] + (r\pm\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ \tilde d_\pm &= \frac{\log\big[\frac{B^2/S_0}{K}\big] + (r\pm\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

Für $r=0$,

$$V_{\text{Barrier}}(S_0,0) \;=\; V_{\text{Call},K}(S_0,0) - \tfrac{S_0}{B} \times V_{\text{Call},K}\big(\tfrac{B^2}{S_0},0\big)$$

mit

$$\begin{aligned} V_{\text{Call},K}(S_0,0) &= S_0\, N(d_+) \,-\, KN(d_-) \\ V_{\text{Call},K}(B^2/S_0) &= B^2/S_0\, N(\tilde d_+) \,-\, KN(\tilde d_-) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_\pm &= \frac{\log\big[\frac{S_0}{K}\big] \pm \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{\log\big[\frac{100}{100}\big] \pm 0.045}{0.3} \\ &= \;\pm\, 0.15 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{d}_\pm &= \frac{\log\left[\frac{B^2/S_t}{K}\right] \pm \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{\log\left[0.64\right] \pm 0.045}{0.3} \\ &= \begin{cases} -1.3376 & \text{fuer "} + \text{"} \\ -1.6376 & \text{fuer "} - \text{"} \end{cases}\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}V_{\text{Call},K}(S_0,0) &= S_0\, N(d_+) \;-\; K N(d_-) \\ &= 100\, N(0.15) \;-\; 100 N(-0.15) \\ &= 55.96 \;-\; 44.04 \;=\; 11.92\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\tfrac{S_0}{B} \times V_{\text{Call},K}\Big(\tfrac{B^2}{S_0},0\Big) &= \tfrac{S_0}{B} \times \Big[B^2/S_0\, N(\tilde{d}_+) \;-\; K N(\tilde{d}_-)\Big] \\ &= B\, N(\tilde{d}_+) \;-\; S_0 K/B N(\tilde{d}_-) \\ &= 80 \times 0.0905 \;-\; 125 \times 0.05075 \;=\; 0.8970\end{aligned}$$

Also insgesamt

$$V_{\text{Barrier}}(S_0,0) \;=\; 11.92 \;-\; 0.8970 \;=\; 11.03$$

und das Vorhandensein der Barriere tut den Preis also nur um 0.8970 verbilligen.

2.Aufgabe: Nach Theorem 8.1 ist der Zeit t Preis eines Barrier Down-and-Out Calls gegeben durch

$$V_{\text{Barrier}}(S_t,t) \;=\; V_{\text{Call},K}(S_t,t) - \big(\tfrac{S_t}{B}\big)^{1-\kappa} V_{\text{Call},K}\big(\tfrac{B^2}{S_t},t\big)$$

mit

$$\kappa \;=\; \frac{2r}{\sigma^2} \;\overset{r=0}{=}\; 0$$

und den Standard-Call-Preisen

$$\begin{aligned}V_{\text{Call},K}(S_t,t) &= S_t\, N(d_+) - K e^{-r(T-t)} N(d_-) \\ V_{\text{Call},K}(B^2/S_t) &= B^2/S_t\, N(\tilde{d}_+) - K e^{-r(T-t)} N(\tilde{d}_-)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}d_\pm &= \frac{\log\left[\frac{S_t}{K}\right] + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ \tilde{d}_\pm &= \frac{\log\left[\frac{B^2/S_t}{K}\right] + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\end{aligned}$$

Für $r = 0$ und $K = B$ erhält man also

$$\begin{aligned} V_{\text{Call},K}(S_t,t) &= S_t\,N(d_+) - BN(d_-) \\ V_{\text{Call},K}(B^2/S_t) &= B^2/S_t\,N(\tilde d_+) - BN(\tilde d_-) \end{aligned}$$

mit

$$d_\pm = \frac{\log\left[\frac{S_t}{B}\right] \pm \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde d_\pm &= \frac{\log\left[B/S_t\right] \pm \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \frac{-\log\left[S_t/B\right] \pm \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= -\frac{\log\left[S_t/B\right] \mp \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}}\ , \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \tilde d_+ &= -d_- \\ \tilde d_- &= -d_+ \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} V_{\text{Barrier}}(S_t,t) &= V_{\text{Call},K}(S_t,t) \ - \ \tfrac{S_t}{B} \times V_{\text{Call},K}\left(\tfrac{B^2}{S_t}\right) \\ &= S_t\,N(d_+) - BN(d_-) \ - \ \tfrac{S_t}{B} \times \left\{B^2/S_t\,N(\tilde d_+) - BN(\tilde d_-)\right\} \\ &= S_t\,N(d_+) - BN(d_-) \ - \ B\,N(\tilde d_+) + S_tN(\tilde d_-) \\ &= S_t\,N(d_+) - BN(d_-) \ - \ B\,N(-d_-) + S_tN(-d_+) \\ &= S_t\,\big[\underbrace{N(d_+) + N(-d_+)}_{=1}\big] \ - \ B\big[\underbrace{N(d_-) + N(-d_-)}_{=1}\big] \\ &= S_t \ - \ B \ = \ S_t \ - \ K\ . \end{aligned}$$

Der Payoff kann repliziert werden, wenn zur Zeit t genau

$$\delta_t = \frac{\partial V}{\partial S_t} = 1$$

Anteile vom Underlying gehalten werden, solange die Barriere noch nicht getroffen wurde. Wird die Barriere bei $t = t_{\text{barrier hit}}$ getroffen, ist die Position dann sofort zu schliessen, also $\delta_t = 0$ für alle $t \geq t_{\text{barrier hit}}$.