Lösungen Übungsblatt 11
Finanzmathematik II

2.Aufgabe: In diskreter Zeit $t = t_k = k\Delta t$ ist die Brownsche Bewegung gegeben durch

$$x_{t_k} \;=\; \sqrt{\Delta t}\,\textstyle\sum_{j=1}^{k}\phi_j$$

mit standard-normalverteilten ϕ_j's, so dass das dx_t gegeben ist durch

$$dx_{t_k} \;:=\; x_{t_k} - x_{t_{k-1}} \;=\; \sqrt{\Delta t}\,\phi_k$$

Die SDE ist dann äquivalent zu der folgenden stochastischen Rekursion:

$$\nu_{t_k} \;=\; \nu_{t_{k-1}} \,+\, \kappa(\bar\nu - \nu_{t_{k-1}})\,\Delta t \,+\, \beta\,\nu_{t_{k-1}}^{\gamma}\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k$$

Die Abhängigkeit der ν's von den ϕ's sieht also so aus:

$$\begin{aligned}\nu_{t_k} &= \nu_{t_k}(\phi_1,\cdots,\phi_{k-1},\phi_k)\\ \nu_{t_{k-1}} &= \nu_{t_{k-1}}(\phi_1,\cdots,\phi_{k-1})\end{aligned}$$

Damit bekommen wir

$$\mathsf{E}\big[\,\beta\,\nu_{t_{k-1}}^{\gamma}\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\,\big] \;=\; \beta\,\sqrt{\Delta t}\;\mathsf{E}\Big[\,\nu_{t_{k-1}}^{\gamma}(\phi_1,\cdots,\phi_{k-1})\,\phi_k\,\Big]$$

mit

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\Big[\,\nu_{t_{k-1}}^{\gamma}(\phi_1,\cdots,\phi_{k-1})\,\phi_k\,\Big] &= \int_{\mathbb{R}^k}\nu_{t_{k-1}}^{\gamma}(\phi_1,\cdots,\phi_{k-1})\;\;\phi_k\;\prod_{j=1}^{k}e^{-\frac{\phi_j^2}{2}}\,\frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}}\\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}}\nu_{t_{k-1}}^{\gamma}(\phi_1,\cdots,\phi_{k-1})\;\prod_{j=1}^{k-1}e^{-\frac{\phi_j^2}{2}}\,\frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}}\;\times\;\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\phi_k\;e^{-\frac{\phi_k^2}{2}}\,\frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}}}_{=\,0}\\ &= 0\end{aligned}$$

Das ist eine allgemeine Sache bei stochastischen DGLs, der Erwartungswert vom diffusiven Teil verschwindet. Wenn wir also den Erwartungswert von der SDE nehmen, bekommen wir

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\,d\nu_t\,] &= \kappa(\bar\nu - \mathsf{E}[\,\nu_t\,])\,dt \,+\, \beta\,\mathsf{E}\big[\,\nu_t^{\gamma}\,dx_t\,\big]\\ &= \kappa(\bar\nu - \mathsf{E}[\,\nu_t\,])\,dt \,+\, 0 \qquad (1)\end{aligned}$$

Nun ist, wieder in diskreter Zeit $t = t_k = k\Delta t$,

$$\mathsf{E}[\, d\nu_{t_k} \,] \;\;=\;\; \mathsf{E}\big[\, \nu_{t_k} \;-\; \nu_{t_{k-1}} \big] \;\;=\;\; \mathsf{E}[\, \nu_{t_k} \,] \;-\; \mathsf{E}[\, \nu_{t_{k-1}} \,]$$

Also folgt aus (1)

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[\, d\nu_{t_k} \,] \;\;&=\;\; \mathsf{E}[\, \nu_{t_k} \,] \;-\; \mathsf{E}[\, \nu_{t_{k-1}} \,] \;\;=\;\; \kappa\big(\bar\nu - \mathsf{E}[\, \nu_{t_{k-1}} \,]\big)\, \Delta t \\ \Leftrightarrow \qquad & \frac{\mathsf{E}[\, \nu_{t_k} \,] \;-\; \mathsf{E}[\, \nu_{t_{k-1}} \,]}{\Delta t} \;\;=\;\; \kappa\big(\bar\nu - \mathsf{E}[\, \nu_{t_{k-1}} \,]\big) \end{aligned}$$

und im Limes $\Delta t \to 0$

$$\frac{d}{dt}\mathsf{E}[\, \nu_t \,] \;\;=\;\; \kappa\big(\bar\nu - \mathsf{E}[\, \nu_t \,]\big)$$

oder

$$\frac{d}{dt}\mathsf{E}[\, \nu_t \,] \;+\; \kappa\, \mathsf{E}[\, \nu_t \,] \;\;=\;\; \kappa\bar\nu$$

und diese DGL wird gelöst von

$$\mathsf{E}[\, \nu_t \,] \;\;=\;\; \bar\nu + (\nu_0 - \bar\nu)\, e^{-\kappa t} \;\;.$$