

**week3: Beispiele Rechnen mit Vektoren und Matrizen:
Numerisches Lösen von DGLen**

Wir wollen numerisch in R die Differentialgleichung

$$\ddot{x}_t + \varepsilon^2 x_t = 0 \quad (1)$$

mit

$$\begin{aligned} x_{t=0} &= x_0 \\ \dot{x}_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

lösen und auf dem Intervall $[0, T]$ plotten. Für die Parameter wählen wir etwa

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2 \\ x_0 &= 1 \\ T &= 50 \end{aligned}$$

Die exakte, theoretische Lösung ist offensichtlich

$$x_t = x_0 \cos \varepsilon t$$

wie man durch einfaches Nachrechnen bestätigen kann.

a) Plotten Sie die exakte Lösung auf dem Intervall $[0, T]$.

b) Die DGL (1) ist äquivalent zum System

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= v_t \\ \dot{v}_t &= -\varepsilon^2 x_t \end{aligned} \quad (2)$$

mit Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} x_{t=0} &= x_0 \\ v_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

Numerisch können wir dann das System (2) durch die Rekursion

$$\begin{aligned} x_{t+dt} &= x_t + v_t dt \\ v_{t+dt} &= v_t - \varepsilon^2 x_t dt \end{aligned} \quad (3)$$

lösen, machen Sie das jetzt in R. Plotten Sie die numerische Lösung und die exakte, theoretische Lösung in demselben Plotfenster, so dass man beides sofort miteinander vergleichen kann. Experimentieren Sie ein bisschen mit dem Wert von dt , um ein Gefühl für die numerische Stabilität der Lösung zu bekommen. Wählen Sie etwa

$$dt \in \{0.1, 0.01, 0.001\} .$$

c) Die Rekursion (3) können wir auch folgendermassen in Matrix-Form schreiben,

$$\begin{pmatrix} x_{t+dt} \\ v_{t+dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & dt \\ -\varepsilon^2 dt & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ v_t \end{pmatrix}$$

oder

$$y_{t+dt} = R_{dt} y_t \quad (4)$$

mit den Definitionen

$$y_t := \begin{pmatrix} x_t \\ v_t \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} R_{dt} &:= \begin{pmatrix} 1 & dt \\ -\varepsilon^2 dt & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix} dt \\ &=: Id + A dt \end{aligned} \quad (5)$$

mit, die Definition von dem A brauchen wir dann gleich noch weiter unten,

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Die Lösung von (4) ist offensichtlich gegeben durch (mit $t = t_k = kdt$)

$$y_{kdt} = R_{dt}^k y_0 \quad (7)$$

mit

$$y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Implementieren Sie die Lösung (7) mit Hilfe von Matrix-Operationen in R und plotten Sie wieder das x_t .

d) Die numerischen Lösungen aus (b) und (c), numerisch gesehen ist das beides dasselbe, erfordern schon ein ziemlich kleines dt , um genau zu sein. Wir wollen versuchen, die numerische Stabilität etwas zu verbessern. Dazu schreiben wir das System (2) in Matrix-Form,

$$\dot{y}_t = A y_t \quad (8)$$

mit der Matrix A aus (6). Für das System (8) können wir für beliebiges, zeitunabhängiges A sofort die Lösung

$$y_t = e^{tA} y_0 \quad (9)$$

hinschreiben. Oder, wenn wir wieder diskrete Zeiten $t = t_k = k \, dt$ betrachten,

$$y_{kdt} = e^{kdtA} y_0 = \left(e^{dtA} \right)^k y_0 = e^{dtA} \left(e^{dtA} \right)^{k-1} y_0 = e^{dtA} y_{(k-1)dt} \quad (10)$$

Wenn wir für die Matrix e^{tA} keinen analytisch geschlossenen Ausdruck haben, können wir trotzdem versuchen, e^{dtA} durch die Terme niedrigster Ordnung der e -Reihe zu approximieren, da das dt ja klein gewählt wird. Also

$$e^{dtA} \approx Id + dtA + \frac{(dt)^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{(dt)^n}{n!} A^n \quad (11)$$

Für $n = 1$ reduziert sich das auf die Gleichung (5) für das R_{dt} von oben, da wissen wir also schon, dass das numerisch nicht zu stabil ist. Wählen Sie jetzt

$$n \in \{2, 3, 4\}$$

und plotten Sie jeweils das x_t , wieder für die Werte

$$dt \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$$

und vergleichen Sie das Resultat mit der exakten, theoretischen Lösung.

- e) Für das e^{tA} oder e^{dtA} kann man eine analytische Formel angeben, man findet (Übungsblatt 3)

$$e^{dtA} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon dt) & \frac{1}{\varepsilon} \sin(\varepsilon dt) \\ -\varepsilon \sin(\varepsilon dt) & \cos(\varepsilon dt) \end{pmatrix} =: U_{dt} \quad (12)$$

Berechnen Sie jetzt noch einmal die exakte Lösung in R mit Hilfe der Rekursion

$$y_k = U_{dt} y_{k-1} \quad (13)$$

und $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.