

7. Übungsblatt zur Vorlesung Datenanalyse mit R

Aufgabe 1) In den letzten beiden `week6.txt` und `week7.txt` hatten wir durch eine Analyse von Finanzzeitreihen das folgende Modell motiviert:

$$S(t_k) = S(t_{k-1}) \times [1 + \text{stddev}_d(t_{k-1}) \phi_k] \quad (1)$$

mit standard-normalverteilten Zufallszahlen $\{\phi_k\}_{k=1}^N$ und der d -Tages-Standardabweichung der Returns

$$\text{stddev}_d^2(t_k) = \frac{1}{d} \left\{ \text{ret}^2(t_k) + \text{ret}^2(t_{k-1}) + \dots + \text{ret}^2(t_{k-d+1}) \right\} \quad (2)$$

Wir hatten dann einige Pfade simuliert. Wenn wir die $\text{stddev}_d(t_{k-1})$ einfach durch eine Konstante ersetzt hatten, etwa $\text{stddev}_d(t_{k-1}) = \text{bsvol} = 1\%$ für alle t_k , dann sahen die Pfade ganz vernünftig aus. Wenn wir jedoch das $\text{stddev}_d(t_k)$ mit der Formel (2) aus den bereits simulierten Daten berechnet hatten, und für das d etwa 20, 5 oder $d = 1$ gewählt hatten, dann wurden die Preispfade für die $S(t_k)$ sehr schnell konstant und die Volatilität ging sehr schnell nach 0. Das wollen wir hier jetzt etwas genauer analysieren. Dazu betrachten wir den Fall $d = 1$, wir bekommen dann das ‘naive ARCH(1)-Modell’ mit der Spezifikation

$$S(t_k) = S(t_{k-1}) \times [1 + \text{stddev}_1(t_{k-1}) \phi_k] \quad (3)$$

mit

$$\text{stddev}_1^2(t_k) \stackrel{\text{Gleichung (2) mit } d=1}{=} \text{ret}^2(t_k) \quad (4)$$

Die Returns $\text{ret}(t_k)$ waren definiert durch

$$\text{ret}(t_k) \stackrel{\text{allg. Def.}}{=} \frac{S(t_k) - S(t_{k-1})}{S(t_{k-1})} \stackrel{\text{hier, mit (3)}}{=} \text{stddev}_1(t_{k-1}) \phi_k \quad (5)$$

Wir können Gleichung (5) in Gleichung (4) einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \text{stddev}_1^2(t_k) &= \text{stddev}_1^2(t_{k-1}) \phi_k^2 \\ &= \text{stddev}_1^2(t_{k-2}) \phi_{k-1}^2 \phi_k^2 \\ &\vdots \\ &= \text{stddev}_1^2(t_0) \phi_1^2 \dots \phi_{k-1}^2 \phi_k^2 \\ &=: \text{startvol}^2 \times \pi_k \end{aligned} \quad (6)$$

wobei wir also die allererste $\text{stddev}_1^2(t_0)$ gleich einer Konstanten setzen, die wir startvol^2

genannt haben, etwa gleich $(1\%)^2$, und die Grössen π_k sind also gegeben durch

$$\pi_k := \phi_1^2 \phi_2^2 \times \cdots \times \phi_{k-1}^2 \phi_k^2 . \quad (7)$$

Wir definieren ebenfalls noch die Grössen

$$s_k := \frac{1}{k} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \cdots + \phi_{k-1}^2 + \phi_k^2) . \quad (8)$$

a) Zeigen Sie durch eine Rechnung mit Bleistift und Papier, ohne R-Code,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[s_k] &= 1 \\ \mathbb{E}[\pi_k] &= 1 \end{aligned}$$

für beliebiges k . Starten Sie dann eine R-Session und versuchen Sie, die folgenden Zahlen und Bilder zu reproduzieren.

b) Wir wollen jeweils

$$N = 10000$$

Realisationen der Zufallszahlen

$$\begin{aligned} s_5, s_{10}, s_{15}, s_{20} &\in \mathbb{R} \\ \pi_5, \pi_{10}, \pi_{15}, \pi_{20} &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

generieren und in den Vektoren

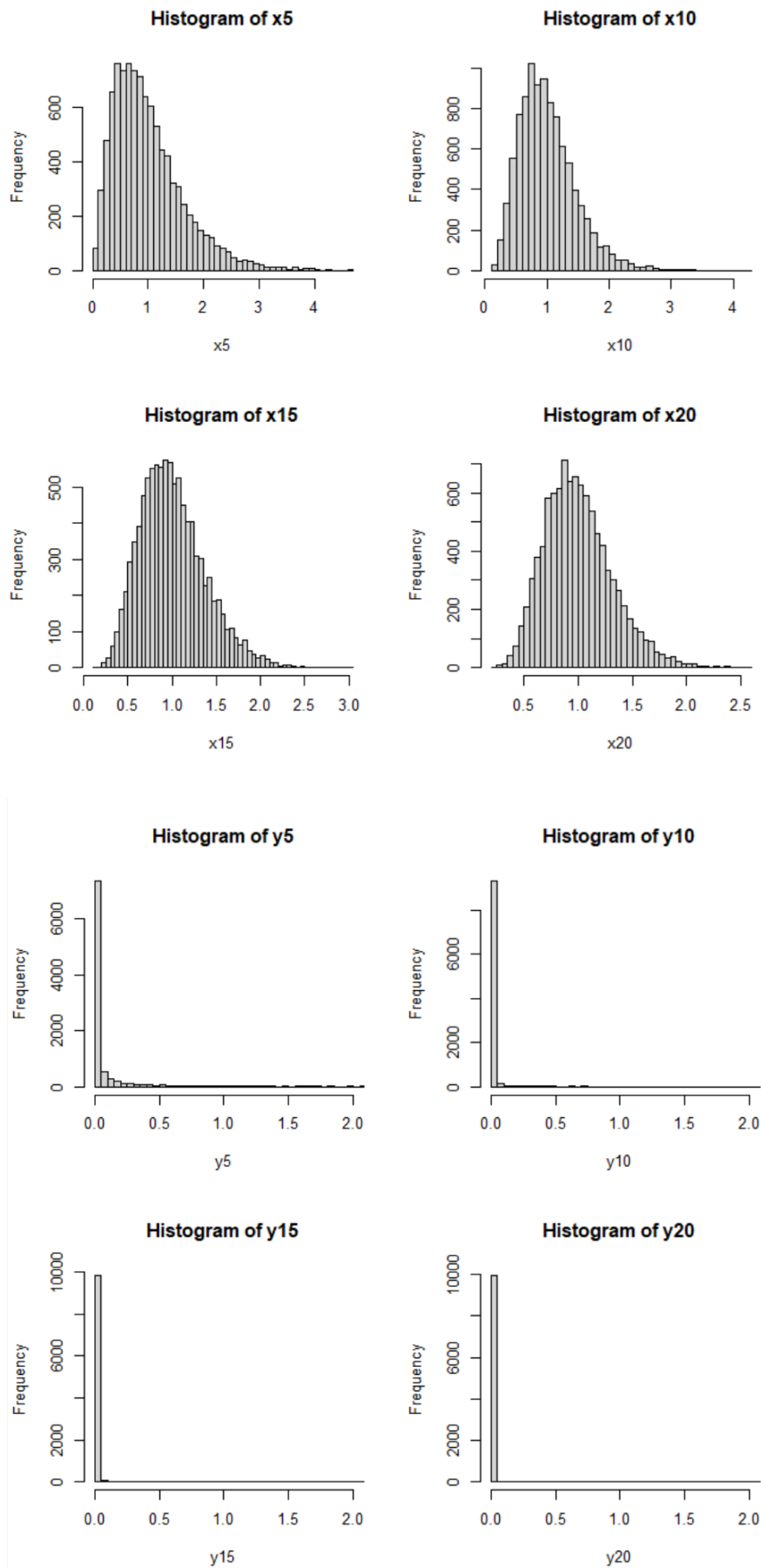
$$\begin{aligned} x_5, x_{10}, x_{15}, x_{20} &\in \mathbb{R}^N \\ y_5, y_{10}, y_{15}, y_{20} &\in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

abspeichern. Schauen Sie sich dann zunächst mal die Quartile, Mediane und Mittelwerte dieser jeweils 10000 Zahlen an:

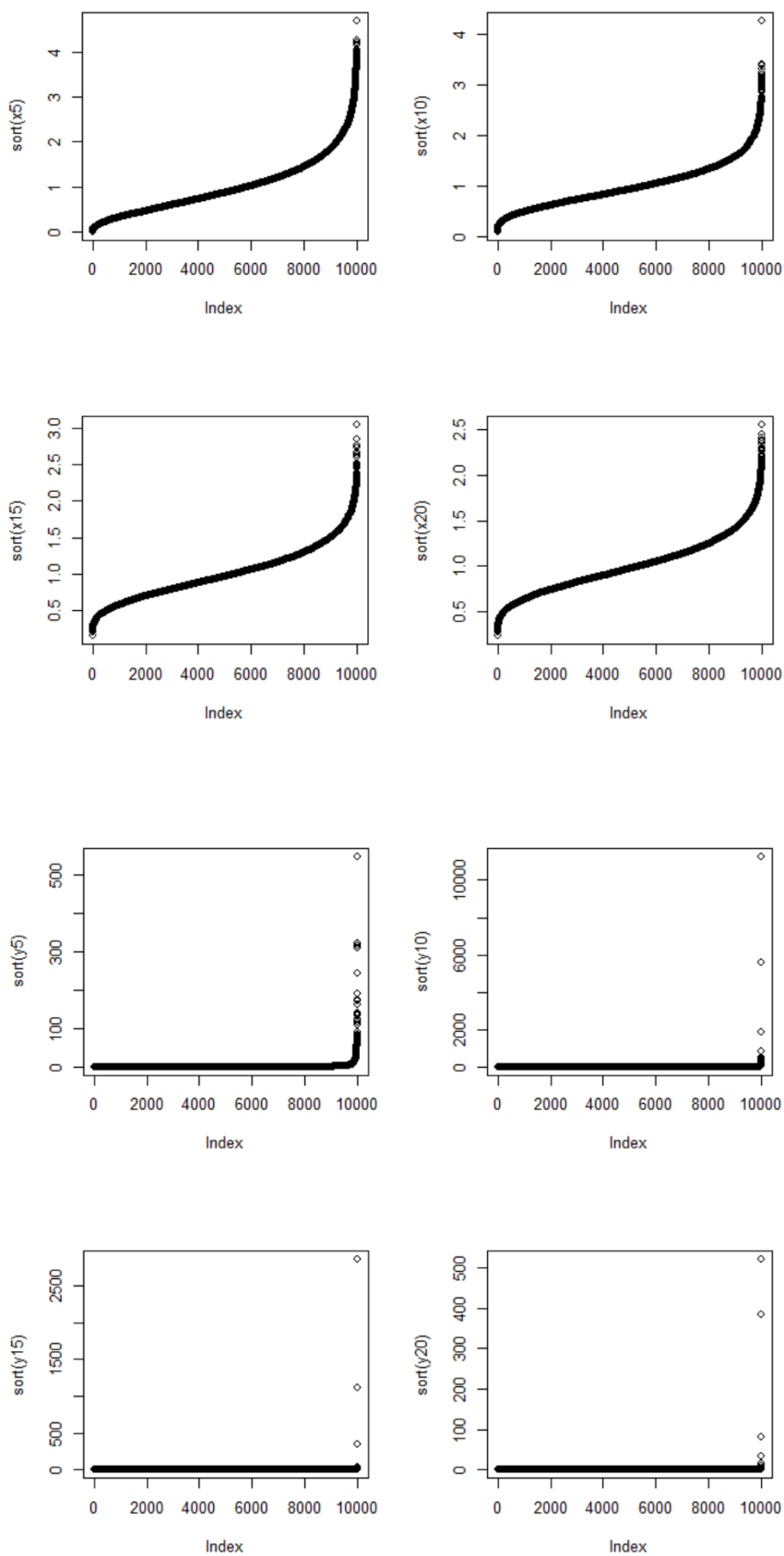
```
> summary(x5)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.01088 0.53266 0.86840 0.99892 1.31642 4.68862
> summary(x10)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.1024 0.6781 0.9374 1.0023 1.2507 4.2755
> summary(x15)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.1434 0.7389 0.9628 1.0052 1.2217 3.0469
> summary(x20)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.2296 0.7784 0.9703 1.0029 1.1876 2.5541
```

```
> summary(y5)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.0000 0.0001 0.0029 1.0133 0.0616 548.4202
> summary(y10)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.000 0.000 0.000 2.421 0.000 11265.759
> summary(y15)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.0000 0.0000 0.0000 0.5754 0.0000 2854.4720
> summary(y20)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.0000 0.0000 0.0000 0.1089 0.0000 520.7419
```

c) Schauen wir uns jetzt die Histogramme, die Verteilungen dieser jeweils 10000 Zufallszahlen an:



d) Ordnen Sie dann diese jeweils 10000 Zufallszahlen der Grösse nach und plotten Sie die geordneten Zahlen. Man bekommt etwa das folgende:



e) Schliesslich wollen wir uns noch die Monte Carlo Summen für die Erwartungswerte der s_k und der π_k anschauen. Für die s_k bekommt man in wesentlichen immer dasselbe Bild, aber

die Bilder für die π_k können recht variable sein, je nachdem, wie die Zufallszahlen sich so realisiert haben:

