week9: Kapitel 2.5.2: Das Brachistochronen-Problem

Eine Perle oder ein Kügelchen der Masse m bewege sich unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F} = (0, -mg)$ reibungsfrei auf einem Draht in der (x, z)-Ebene. Der Draht werde durch eine Funktion $z = f(x)$ beschrieben und verbinde die Punkte $P_1 = (0, h)$ und $P_2 = (\ell, 0)$. Wir haben also ein Problem mit einem Freiheitsgrad und wir wählen x als die verallgemeinerte Koordinate. Auf dem letzten Übungsblatt 8 hatten wir die folgende Formel für die Zeit T hergeleitet, die das Kügelchen braucht, um vom Startpunkt $(0, h)$ bis zum Endpunkt $(\ell, 0)$ zu gelangen, sie war gegeben durch

$$T \;=\; T(q) \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\ell \sqrt{\tfrac{1+q'(x)^2}{q(x)}}\, dx \tag{1}$$

Dabei hatten wir das $f(x)$ durch das $q(x)$ ersetzt gemäss

$$q(x) \;:=\; h - f(x)\,, \qquad q'(x) \;=\; -f'(x)\,. \tag{2}$$

Wir wollen jetzt dasjenige $f(x)$ oder $q(x)$ bestimmen, für welches die Durchlaufzeit T oder das folgende Integral $I = I(q)$ minimal ist:

$$I(q) \;:=\; \int_0^\ell L\big(\, q(x)\,,\, q'(x)\,\big)\, dx \;\stackrel{!}{\to}\; \min \tag{3}$$

mit der Funktion

$$L(q, q') \;=\; \sqrt{\tfrac{1+q'(x)^2}{q(x)}} \tag{4}$$

Nach dem Theorem 2.5.1 aus dem week8.pdf (das t ist dann hier das x) ist notwendige Bedingung für ein Minimum das Bestehen der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\tfrac{d}{dx}\tfrac{\partial L}{\partial q'} \;-\; \tfrac{\partial L}{\partial q} \;=\; 0 \tag{5}$$

Da wir eine Euler-Lagrange-Gleichung haben und das L nicht explizit von dem x abhängt, können wir ebenfalls das Theorem 2.5.2 aus dem week8.pdf anwenden und bekommen, dass die Funktion

$$H(q, q') \;:=\; \tfrac{\partial L}{\partial q'}\, q' \;-\; L \tag{6}$$

konstant ist, sie ist unabhängig von $x \in [0, \ell]$.

Beh.1: Es gilt

$$H(q, q') \;=\; -\,\frac{1}{\sqrt{q(x)[1 + q'(x)^2]}} \;=\; \text{constant} \;=:\; -\,\frac{1}{\sqrt{c}} \tag{7}$$

Bew.1: Mit

$$L(q,q') = \sqrt{\tfrac{1+q'(x)^2}{q(x)}} \tag{8}$$

bekommen wir

$$\frac{\partial L}{\partial q'} = \frac{1}{\sqrt{q(x)}}\,\frac{2\,q'(x)}{2\sqrt{1+q'(x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{q(x)}}\,\frac{q'(x)}{\sqrt{1+q'(x)^2}}$$

und damit

$$\begin{aligned} H(q,q') &:= \frac{\partial L}{\partial q'}\,q' - L \\ &= \frac{1}{\sqrt{q(x)}}\,\frac{q'(x)^2}{\sqrt{1+q'(x)^2}} - \frac{1}{\sqrt{q(x)}}\,\sqrt{1+q'(x)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{q(x)}}\,\frac{q'(x)^2}{\sqrt{1+q'(x)^2}} - \frac{1}{\sqrt{q(x)}}\,\frac{1+q'(x)^2}{\sqrt{1+q'(x)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{q(x)}}\,\frac{-1}{\sqrt{1+q'(x)^2}} = \text{constant} \qquad (9) \end{aligned}$$

Beh.2: Anstatt x als Parameter wollen wir das x durch einen neuen Parameter t ausdrücken, $x = x_t$, und das $q(x_t)$ wollen wir y_t nennen, also

$$x = x_t \tag{10}$$

$$q(x) = q(x_t) = y_t \tag{11}$$

Dann ist (7) äquivalent zu

$$y(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = c\,\dot{x}^2 \tag{12}$$

Bew.2: Wir haben

$$\begin{aligned} & y(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = c\,\dot{x}^2 \\ \Leftrightarrow\quad & y\Big(1 + \tfrac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\Big) = c \\ \Leftrightarrow\quad & y\Big(1 + \big\{\tfrac{dy/dt}{dx/dt}\big\}^2\Big) = c \\ \Leftrightarrow\quad & y\Big(1 + \big\{\tfrac{dy}{dx}\big\}^2\Big) = c \\ \overset{y=q(x)}{\Leftrightarrow}\quad & q(x)\Big(1 + \big\{q'(x)\big\}^2\Big) = c \\ \Leftrightarrow\quad & -\frac{1}{\sqrt{q(x)[1+q'(x)^2]}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \end{aligned}$$

Beh.3: Die Gleichung (12) wird gelöst durch

$$x_t = \tfrac{c}{2}\big[\,2t - \sin(2t)\,\big] \tag{13}$$

$$y_t = \tfrac{c}{2}\big[\,1 - \cos(2t)\,\big] \tag{14}$$

wobei das c und der Parameterbereich für das $t \in [0, t_{\text{end}}]$, also das t_{end}, durch die Randbedingungen

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &= (0,0) && (15) \\ (x_{t_{\text{end}}}, y_{t_{\text{end}}}) &= (\ell, h) && (16) \end{aligned}$$

geeignet festzulegen sind.

Bew.3: Mit

$$\begin{aligned} x_t &= \tfrac{c}{2}\big[\,2t \,-\, \sin(2t)\,\big] \\ y_t &= \tfrac{c}{2}\big[\,1 \,-\, \cos(2t)\,\big] \end{aligned}$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= \tfrac{c}{2}\big[\,2 \,-\, 2\cos(2t)\,\big] \;=\; c\,\big[\,1 \,-\, \cos(2t)\,\big] \\ \dot{y}_t &= \tfrac{c}{2}\big[\,0 \,+\, 2\sin(2t)\,\big] \;=\; c\,\sin(2t) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= c^2\big\{1 \,-\, 2\cos(2t) \,+\, \cos^2(2t) \,+\, \sin^2(2t)\big\} \\ &= 2c^2\big\{1 \,-\, \cos(2t)\big\} \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} y(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) &= \tfrac{c}{2}\big[\,1 \,-\, \cos(2t)\,\big] \;\times\; 2c^2\big\{1 \,-\, \cos(2t)\big\} \\ &= c^3\,\big[\,1 \,-\, \cos(2t)\,\big]^2 \;=\; c\,\dot{x}^2 \end{aligned}$$

Schauen wir uns die Randbedingungen

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &\overset{!}{=} (0,0) && (17) \\ (x_{t_{\text{end}}}, y_{t_{\text{end}}}) &\overset{!}{=} (\ell, h) && (18) \end{aligned}$$

an. Gleichung (17) ist offensichtlich automatisch erfüllt, für beliebiges c und t_{end}. Aus Gleichung (18) ergibt sich

$$\begin{aligned} x_{t_{\text{end}}} &= \tfrac{c}{2}\big[\,2t_{\text{end}} \,-\, \sin(2t_{\text{end}})\,\big] \;\overset{!}{=}\; \ell && (19) \\ y_{t_{\text{end}}} &= \tfrac{c}{2}\big[\,1 \,-\, \cos(2t_{\text{end}})\,\big] \;\overset{!}{=}\; h && (20) \end{aligned}$$

Wir können etwa das c eliminieren, indem wir (20) durch (19) teilen,

$$\frac{y_{t_{\text{end}}}}{x_{t_{\text{end}}}} \;=\; \frac{1 \,-\, \cos(2t_{\text{end}})}{2t_{\text{end}} \,-\, \sin(2t_{\text{end}})} \;\overset{!}{=}\; \frac{h}{\ell} \qquad (21)$$

Aus Gleichung (21) bekommen wir das t_{end} und aus (19) oder (20) dann das c.

Schauen wir uns einen konkreten Fall an. Wählen wir etwa

$$\begin{aligned} h &= 20\,\mathrm{cm} \\ \ell &= 100\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Wir plotten die Hilfsfunktion, das ist der Ausdruck in (21) minus der rechten Seite,

$$g(t) \;:=\; \frac{1 - \cos(2t)}{2t - \sin(2t)} - \frac{h}{\ell} \;=\; \frac{1 - \cos(2t)}{2t - \sin(2t)} - \frac{1}{5}$$

und tun dann einfach die Nullstelle (oder die Nullstellen..) davon graphisch bestimmen, das ist dann das t_{end}. Kann man etwa auf einem Excelsheet machen.

Tatsächlich findet man 3 Nullstellen und damit 3 verschiedene Lösungen für (c, t_{end}). Möglicherweise sind die anderen beiden Lösungen dann stationäre Punkte für das Funktional (1) oder (3) von oben, also so ähnlich wie $x = 0$ ein stationärer Punkt für die Funktion $y(x) = x^3$ ist, die erste Ableitung ist 0, aber es ist kein Minimum. Ok, wir tun das hier nicht weiter analysieren. Alle 3 Lösungen sind auf dem Excelsheet geplottet.