

**week8: Kapitel 2.5: Herleitung der Euler-Lagrange Gleichungen
aus einem Variationsprinzip**

Wir betrachten eine Funktion $L : \mathbb{R}^{2f} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L = L(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t)) = L(q(t), \dot{q}(t)) \quad (1)$$

und das Integral

$$I := \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt =: I(q) \quad (2)$$

Für L haben wir hier natürlich die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems im Sinn, aber das folgende gilt für ein beliebiges L . Wir wollen diejenigen Bahnkurven

$$q(t) = (q_1(t), \dots, q_f(t))$$

bestimmen, für die das Integral $I(q)$ extremal wird. Dabei soll der Anfangs- und der Endpunkt von $q(t)$ fest vorgegeben sein,

$$\begin{aligned} q(0) &= q_0 \in \mathbb{R}^f \text{ fest,} \\ q(T) &= q_T \in \mathbb{R}^f \text{ fest.} \end{aligned}$$

Es sei

$$\eta(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_f(t)) \in \mathbb{R}^f$$

eine beliebige Kurve mit

$$\eta(0) = \eta(T) = \vec{0}. \quad (3)$$

Wir betrachten dann die Kurven

$$q_\varepsilon(t) := q(t) + \varepsilon \eta(t) \quad (4)$$

Offensichtlich gilt dann für diese Kurven

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(0) &= q(0) + \varepsilon \eta(0) = q_0 \\ q_\varepsilon(T) &= q(T) + \varepsilon \eta(T) = q_T \end{aligned}$$

für beliebige $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Wir können diese Bahnkurven in das $I(q)$ aus Gleichung (2) einsetzen und bekommen dann ein $I(q_\varepsilon)$. Wenn das $q(t)$ dann ein extremaler Pfad für das Integral (2) sein soll, muss die folgende notwendige Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} I(q_\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \int_0^T L(q(t) + \varepsilon\eta(t), \dot{q}(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t)) dt \stackrel{!}{=} 0 \quad (5)$$

für alle Pfade η , die die Randbedingungen (3) erfüllen. Es gilt nun das folgende

Theorem 2.5.1: Der Pfad $q_t = (q_{1,t}, \dots, q_{f,t})$ ist genau dann ein stationärer Pfad für das Integral $I = \int_0^T L(q_t, \dot{q}_t) dt$, wenn die $q_{j,t}$ die Euler-Lagrange Gleichungen erfüllen. Das heisst, es gilt die folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \int_0^T L(q(t) + \varepsilon\eta(t), \dot{q}(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t)) dt &= 0 \quad \forall \eta \text{ mit } \eta(0) = \eta(T) = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} &= 0 \quad \forall j = 1, \dots, f. \end{aligned} \quad (6)$$

Beweis: Wir nehmen an, dass wir das Integral mit der Ableitung vertauschen können, das ist der Standard-Fall, der typische Fall, und müssen dann also die Ableitung von L nach dem ε berechnen. Das geht dann mit der mehrdimensionalen Kettenregel,

$$\frac{d}{d\varepsilon} L(q(t) + \varepsilon\eta(t), \dot{q}(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t)) = \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_j} \eta_j(t) + \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{\eta}_j(t) \quad (7)$$

Das setzen wir jetzt in die Gleichung (5) ein:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\varepsilon} &= \int_0^T \left\{ \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_j} \eta_j(t) + \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{\eta}_j(t) \right\} dt \\ &= \sum_{j=1}^f \int_0^T \frac{\partial L}{\partial q_j} \eta_j(t) dt + \sum_{j=1}^f \int_0^T \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{\eta}_j(t) dt \end{aligned} \quad (8)$$

Für die Integrale in der zweiten Summe auf der rechten Seite von (8) können wir eine partielle Integration durchführen:

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{\eta}_j(t) dt &\stackrel{\text{andere Notation}}{=} \int_0^T \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q_\varepsilon(t), \dot{q}_\varepsilon(t)) \times \frac{d\eta_j(t)}{dt} dt \\ &\stackrel{\text{partielle Integration}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q_\varepsilon(t), \dot{q}_\varepsilon(t)) \times \eta_j(t) \Big|_{t=0}^{t=T} \\ &\quad - \int_0^T \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q_\varepsilon(t), \dot{q}_\varepsilon(t)) \times \eta_j(t) dt \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q_\varepsilon(T), \dot{q}_\varepsilon(T)) \times \eta_j(T) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q_\varepsilon(0), \dot{q}_\varepsilon(0)) \times \eta_j(0) \\ &\quad - \int_0^T \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q_\varepsilon(t), \dot{q}_\varepsilon(t)) \times \eta_j(t) dt \\ &\stackrel{(3)}{=} 0 - 0 - \int_0^T \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q_\varepsilon(t), \dot{q}_\varepsilon(t)) \times \eta_j(t) dt \end{aligned} \quad (9)$$

Wir setzen Gleichung (9) in Gleichung (8) ein und bekommen

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\varepsilon} &= \sum_{j=1}^f \int_0^T \frac{\partial L}{\partial q_j} \eta_j(t) dt - \sum_{j=1}^f \int_0^T \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (q_\varepsilon(t), \dot{q}_\varepsilon(t)) \times \eta_j(t) dt \\ &= \sum_{j=1}^f \int_0^T \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right\} (q_\varepsilon(t), \dot{q}_\varepsilon(t)) \times \eta_j(t) dt \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Da die Funktionen $\eta_j(t)$ völlig willkürlich sein können, muss dann notwendigerweise gelten:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, f.$$

Damit ist das Theorem ist bewiesen. ■

Eines der Standard-Probleme, was in diesem Zusammenhang häufig in den Büchern diskutiert wird, ist das sogenannte Brachistochronen-Problem, das schauen wir uns dann nächste Woche an. Dabei wird für uns insbesondere die folgende Tatsache sehr hilfreich sein:

Theorem 2.5.2: Es sei $L = L(q, \dot{q}) : \mathbb{R}^{2f} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und die Bahnkurve $q_t = (q_{1,t}, \dots, q_{f,t})$ erfülle die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, f. \quad (10)$$

Dann gilt: Die Funktion

$$H(q, \dot{q}) := \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L(q, \dot{q}) \quad (11)$$

ist eine Erhaltungsgrösse, d.h. es gilt

$$\frac{d}{dt} H(q_t, \dot{q}_t) = 0. \quad (12)$$

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(q_t, \dot{q}_t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L(q, \dot{q}) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^f \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] - \frac{d}{dt} L(q, \dot{q}) \end{aligned} \quad (13)$$

Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen (10) bekommen wir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (14)$$

Das können wir in (13) einsetzen und erhalten

$$\frac{d}{dt}H(q_t, \dot{q}_t) = \sum_{j=1}^f \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] - \frac{d}{dt}L(q, \dot{q}) \quad (15)$$

Die Zeitableitung der Lagrange-Funktion können wir mit der Kettenregel folgendermassen umschreiben:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(q, \dot{q}) &= \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \\ &= \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \end{aligned} \quad (16)$$

und das ist offensichtlich identisch mit der Summe in (15), also haben wir

$$\frac{d}{dt}H(q_t, \dot{q}_t) = 0$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

Definition 2.5.3: Die Funktion H aus Gleichung (11),

$$H(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L(q, \dot{q})$$

heisst die Hamilton-Funktion des mechanischen Systems.

Bemerkung: Die Aussage des Theorems 2.5.2 findet man auch häufig unter dem Begriff 'Noether-Theorem'. Genauer ist es der Spezialfall für eine zeittranslationsinvariante Lagrange-Funktion oder für eine Lagrange-Funktion, die nicht explizit von der Zeit abhängt. Das heisst, man hat $L = L(q, \dot{q})$, aber nicht $L = L(q, \dot{q}, t)$.