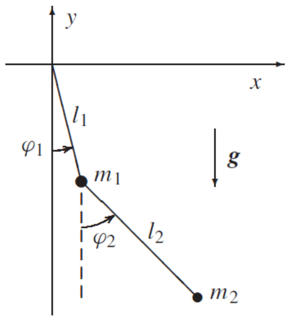
Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

Dynamik der Teilchen und Felder
WS 2023/24

week7: Beispiele zu Kapitel 2.3: Die Euler-Lagrange Gleichungen für das Doppelpendel und Systeme von gekoppelten Oszillatoren, Teil2

Letzte Woche hatten wir das ebene Doppelpendel unter dem Einfluss der Schwerkraft betrachtet,



und die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} &= 0 \end{aligned}$$

explizit berechnet. Sie waren äquivalent zu

$$\begin{aligned} \left(1+\tfrac{m_1}{m_2}\right)\ell_1\,\ddot\varphi_1 + \ell_2\,\ddot\varphi_2\,\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \ell_2\,\dot\varphi_2^2\,\sin(\varphi_1-\varphi_2) + \left(1+\tfrac{m_1}{m_2}\right)g\,\sin\varphi_1 &= 0 \\ \ell_2\,\ddot\varphi_2 + \ell_1\,\ddot\varphi_1\,\cos(\varphi_1-\varphi_2) - \ell_1\,\dot\varphi_1^2\,\sin(\varphi_1-\varphi_2) + g\,\sin\varphi_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses System lässt sich in analytisch geschlossener Form nicht weiter vereinfachen. Um weiter rechnen zu können, hatten wir den Grenzfall kleiner Auslenkungen und Geschwindigkeiten betrachtet. Konkret hatten wir dazu die Näherungen

$$\begin{aligned} \sin x &\approx x \\ \cos x &\approx 1 \end{aligned}$$

gemacht und die Terme $\dot\varphi_i^2\,\sin(\varphi_1-\varphi_2)$ hatten wir weggelassen. Damit bekamen wir das linearisierte System

$$\begin{aligned} \left(1+\tfrac{m_1}{m_2}\right)\ell_1\,\ddot\varphi_1 + \ell_2\,\ddot\varphi_2 + \left(1+\tfrac{m_1}{m_2}\right)g\,\varphi_1 &= 0 \\ \ell_2\,\ddot\varphi_2 + \ell_1\,\ddot\varphi_1 + g\,\varphi_2 &= 0 \end{aligned}$$

Das hatten wir dann in 2×2 Matrix-Form geschrieben

$$T\,\ddot\varphi + V\,\varphi = 0$$

oder explizit

$$\begin{pmatrix} \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\ell_1 & \ell_2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot\varphi_1 \\ \ddot\varphi_2 \end{pmatrix} \;+\; \begin{pmatrix} \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Gleichung (1) ist ein Beispiel für ein System von 2 gekoppelten Oszillatoren. Dabei wollen wir ein System von n gekoppelten Oszillatoren definieren als ein System, welches durch das folgende System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden kann:

$$T\,\ddot x \;+\; V\,x \;=\; 0 \tag{2}$$

Dabei ist

$$x \;=\; x_t \;=\; \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^n \tag{3}$$

ein Vektor mit n Funktionen von der Zeit, wobei $x_i(t)$ die Bewegung des i-ten Oszillators beschreibt. T und V sind $n \times n$ Matrizen,

$$T \;\in\; \mathbb{R}^{n\times n}\;, \quad V \;\in\; \mathbb{R}^{n\times n} \tag{4}$$

deren Einträge T_{jk} und V_{jk} nicht von der Zeit abhängen. Für das linearisierte Doppelpendel haben wir also $n = 2$,

$$x \;=\; \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

und

$$T \;=\; \begin{pmatrix} \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\ell_1 & \ell_2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$V \;=\; \begin{pmatrix} \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \tag{7}$$

Allgemeine Lösung für n gekoppelte Oszillatoren: Wir wollen die allgemeine Lösung von Gleichung (2) angeben. Dazu führen wir die Notation

$$v \;:=\; \dot x \;=\; \begin{pmatrix} \dot x_1(t) \\ \dot x_2(t) \\ \vdots \\ \dot x_n(t) \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^n \tag{8}$$

ein. Offensichtlich ist dann

$$\dot v \;=\; \ddot x \tag{9}$$

und das System (2) können wir dann auch so schreiben:

$$T\,\dot v \;+\; V\,x \;=\; 0 \tag{10}$$

$$\dot x \;-\; v \;=\; 0 \tag{11}$$

Aus dem System 2. Ordnung mit n Gleichungen haben wir also ein System 1. Ordnung (wir haben keine zweiten Ableitungen mehr, sondern nur noch erste Ableitungen, die zweiten Ableitungen haben wir 'wegformalisiert') mit $2n$ Gleichungen gemacht, das ist ein Standard-Trick bei Differentialgleichungen. Systeme erster Ordnung können standardmässig numerisch simuliert werden.

Wir nehmen an, dass das T invertierbar ist, und schreiben

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v && (12) \\ \dot{v} &= -T^{-1}V\,x \;\; =: \;\; -Ax && (13) \end{aligned}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \tag{14}$$

mit

$$A \;:=\; T^{-1}V \;\in\; \mathbb{R}^{n\times n} \tag{15}$$

und die beiden Nullen in (14) stehen jeweils für $n\times n$ Matrizen mit lauter Nullen. Da nach Annahme die Matrix A nicht von der Zeit t abhängt, ist die allgemeine Lösung von (14) gegeben durch (siehe auch Aufgabe 1 auf dem neuen Übungsblatt 7)

$$\begin{pmatrix} x_t \\ v_t \end{pmatrix} = \exp\left\{ t\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Nun gilt das folgende

Lemma 2.4.3: Es sei A eine beliebige reelle oder komplexe $n\times n$ Matrix und Ω sei eine $n\times n$ Matrix mit

$$\Omega^2 \;=\; A \tag{17}$$

Weiter bezeichne Id die $n\times n$ Einheitsmatrix. Dann gilt

$$\exp\left\{ t\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t)\,\Omega^{-1} \\ -\sin(\Omega t)\,\Omega & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} \tag{18}$$

wobei die $n\times n$ Matrizen $\cos(\Omega t)$ und $\sin(\Omega t)$ über die Potenzreihenentwicklungen der Sinus- und Cosinus-Funktion definiert sind.

Beweis: Übungsblatt 6, Aufgabe 1. ■

Damit können wir jetzt die allgemeine Lösung (16) für ein System von n gekoppelten Oszillatoren auch folgendermassen schreiben, wir betrachten nur das x_t (das v_t ist ja einfach nur die Ableitung vom x_t):

$$x_t \;=\; \cos(\Omega t)\,x_0 \;+\; \sin(\Omega t)\,\Omega^{-1}\,v_0 \tag{19}$$

Wir erinnern uns kurz an die allgemeine Lösung des eindimensionalen harmonischen Oszillators, die wir auf dem 1. Übungsblatt berechnet hatten, sie war gegeben durch

$$x(t) \;=\; x_0\,\cos(\omega t) \;+\; \tfrac{\dot{x}_0}{\omega}\,\sin(\omega t) \tag{20}$$

und Gleichung (19) ist dann offensichtlich die natürliche Verallgemeinerung von (20) für den Fall mehrerer Oszillatoren.

Zurück zum linearisierten Doppelpendel:

Wir hatten

$$T \;=\; \begin{pmatrix} \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\,\ell_1 & \ell_2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix}, \qquad V \;=\; \begin{pmatrix} \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\,g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$$

Wegen

$$T^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\,\ell_1 & \ell_2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix}^{-1} \;=\; \frac{1}{\frac{m_1}{m_2}\ell_1\ell_2} \begin{pmatrix} \ell_2 & -\ell_2 \\ -\ell_1 & \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\,\ell_1 \end{pmatrix}$$

bekommen wir

$$\begin{aligned}
A \;=\; T^{-1}V \;&=\; \frac{1}{\frac{m_1}{m_2}\ell_1\ell_2} \begin{pmatrix} \ell_2 & -\ell_2 \\ -\ell_1 & \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\,\ell_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\,g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \\
&=\; \frac{1}{\frac{m_1}{m_2}\ell_1\ell_2} \begin{pmatrix} \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\,\ell_2\,g & -\ell_2\,g \\ -\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\,\ell_1\,g & \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\,\ell_1\,g \end{pmatrix} \\
&=\; \frac{g}{\frac{m_1}{m_2}\ell_1\ell_2}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) \begin{pmatrix} \ell_2 & -\ell_2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} \\ -\ell_1 & \ell_1 \end{pmatrix} \\
&=\; \left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{\ell_1\ell_2} \begin{pmatrix} \ell_2 & -c\,\ell_2 \\ -\ell_1 & \ell_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

wobei wir

$$c \;:=\; \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} \;=\; \frac{m_2}{m_1+m_2} \tag{21}$$

gesetzt haben. Wir berechnen die Eigenwerte:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} \ell_2-\lambda & -c\,\ell_2 \\ -\ell_1 & \ell_1-\lambda \end{pmatrix} \;&=\; (\ell_2-\lambda)(\ell_1-\lambda)\;-\;c\,\ell_1\ell_2 \\
&=\; \lambda^2\;-\;(\ell_1+\ell_2)\lambda\;+\;(1-c)\ell_1\ell_2 \;\stackrel{!}{=}\; 0
\end{aligned} \tag{22}$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned}
\lambda_\pm \;&=\; \frac{\ell_1+\ell_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\ell_1+\ell_2}{2}\right)^2 - \ell_1\ell_2 + c\,\ell_1\ell_2} \\
&=\; \frac{\ell_1+\ell_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\ell_1-\ell_2}{2}\right)^2 + c\,\ell_1\ell_2}
\end{aligned} \tag{23}$$

Beide Eigenwerte sind offensichtlich reell. Weiterhin ist $\lambda_+ > 0$, sieht man sofort, und wegen

$$\lambda_+\lambda_- \;=\; (1-c)\ell_1\ell_2 \;\stackrel{c<1}{>}\; 0 \tag{24}$$

das folgt aus (22), muss auch das λ_- positiv sein, $\lambda_- > 0$. Also sind beide Eigenwerte $\lambda_\pm$ positiv, $\lambda_\pm > 0$. Berücksichtigen wir noch den Vorfaktor in

$$A \;=\; \left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{\ell_1\ell_2} \begin{pmatrix} \ell_2 & -c\,\ell_2 \\ -\ell_1 & \ell_1 \end{pmatrix}$$

dann erhalten wir die folgenden Eigenwerte für die Matrix A,

$$\omega_\pm^2 \;=\; \left(1+\tfrac{m_2}{m_1}\right)\tfrac{g}{\ell_1\ell_2}\left\{\tfrac{\ell_1+\ell_2}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{\ell_1-\ell_2}{2}\right)^2 + c\,\ell_1\ell_2}\right\} \tag{25}$$

Die Grössen ω_+ und ω_- haben dann die Bedeutung von reellen Frequenzen, sie haben die Dimension 1/Zeit. Die Eigenvektoren können wir natürlich auch explizit berechnen, aber wir verzichten hier für den Moment darauf, wir wollen uns nur grob die Struktur der Lösung anschauen. Die 2×2 Matrix der Eigenvektoren würde man vielleicht mit einem V bezeichnen, aber das V haben wir oben schon verbraucht, also nennen wir das vielleicht B, B wie Basis aus Eigenvektoren, also

$$B \;=\; \left(\,\vec{b}_+\;\vec{b}_-\,\right) \;\in\; \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{26}$$

mit

$$A\,\vec{b}_\pm \;=\; \omega_\pm^2\,\vec{b}_\pm \tag{27}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
A &= B\begin{pmatrix}\omega_+^2 & 0\\ 0 & \omega_-^2\end{pmatrix}B^{-1}\\
&= B\begin{pmatrix}\omega_+ & 0\\ 0 & \omega_-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_+ & 0\\ 0 & \omega_-\end{pmatrix}B^{-1}\\
&= B\begin{pmatrix}\omega_+ & 0\\ 0 & \omega_-\end{pmatrix}B^{-1}B\begin{pmatrix}\omega_+ & 0\\ 0 & \omega_-\end{pmatrix}B^{-1}\\
&= \Omega^2
\end{aligned} \tag{28}$$

mit

$$\Omega \;:=\; B\begin{pmatrix}\omega_+ & 0\\ 0 & \omega_-\end{pmatrix}B^{-1} \tag{29}$$

Die Matrizen $\cos(\Omega t)$ und $\sin(\Omega t)$ aus der allgemeinen Lösung (19) lassen sich damit ebenfalls sofort berechnen. Wegen

$$\Omega^n \;=\; B\begin{pmatrix}\omega_+^n & 0\\ 0 & \omega_-^n\end{pmatrix}B^{-1} \tag{30}$$

bekommen wir (das gilt dann für beliebige Potenzreihen von Ω)

$$\cos(\Omega t) \;=\; B\begin{pmatrix}\cos(\omega_+ t) & 0\\ 0 & \cos(\omega_- t)\end{pmatrix}B^{-1} \tag{31}$$

$$\sin(\Omega t) \;=\; B\begin{pmatrix}\sin(\omega_+ t) & 0\\ 0 & \sin(\omega_- t)\end{pmatrix}B^{-1} \tag{32}$$

Damit ist die allgemeine Lösung für das linearisierte Doppelpendel gegeben durch

$$\begin{pmatrix}\varphi_{1,t}\\ \varphi_{2,t}\end{pmatrix} \;=\; \cos(\Omega t)\begin{pmatrix}\varphi_{1,0}\\ \varphi_{2,0}\end{pmatrix} \;+\; \sin(\Omega t)\,\Omega^{-1}\begin{pmatrix}\dot\varphi_{1,0}\\ \dot\varphi_{2,0}\end{pmatrix} \tag{33}$$

Wir konkretisieren das dann noch ein bischen auf dem neuen Übungsblatt 7.