## week4: Beispiele zu Kapitel 2.1: Die Euler-Lagrange Gleichungen der klassischen Mechanik, 1 Teilchen

Wir wollen an zwei Beispielen das Material der letzten Woche etwas üben und vertiefen. In dem ersten Beispiel betrachten wir zunächst eine kräftefreie Bewegung im $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten. Wir machen da also genau dasselbe, was Sie auch schon auf dem 3. Übungsblatt gemacht haben, nur jetzt nicht mit Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$, sondern eben mit Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$. Die Formeln, die wir da herleiten werden, benutzen wir dann im zweiten Beispiel, wo wir dann die Bewegung eines Kügelchens in einer halbkugelförmigen Schüssel diskutieren. In den Büchern oder im Internet finden Sie dieses Beispiel typischerweise unter dem Begriff 'sphärisches Pendel'.

### Beispiel 1: Kräftefreie Bewegung eines Teilchens im $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ sind gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; r \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\sin\theta \\ \sin\varphi\,\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit

$$\begin{aligned} r &\in [0,+\infty) \\ \varphi &\in [0,2\pi) \\ \theta &\in [0,\pi] \end{aligned} \tag{2}$$

Wir führen folgende Basisvektoren ein:

$$\vec{e}_r \;:=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\sin\theta \\ \sin\varphi\,\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi \;:=\; \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta \;:=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\theta \\ \sin\varphi\,\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \tag{3}$$

Dann gilt

$$\|\vec{e}_r\|^2 \;=\; \|\vec{e}_\varphi\|^2 \;=\; \|\vec{e}_\theta\|^2 \;=\; 1$$

und

$$\vec{e}_r\,\vec{e}_\varphi \;=\; \vec{e}_r\,\vec{e}_\theta \;=\; \vec{e}_\varphi\,\vec{e}_\theta \;=\; 0$$

das heisst, die Vektoren $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta\}$ bilden eine Orthonormalbasis. Wir betrachten jetzt eine Bahnkurve $\vec{x}_t \in \mathbb{R}^3$ und parametrisieren das $\vec{x}_t$ mit Kugelkoordinaten $(r_t, \varphi_t, \theta_t)$. Wir haben dann also

$$\vec{x}_t \;=\; \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} \;=\; r_t \begin{pmatrix} \cos\varphi_t\,\sin\theta_t \\ \sin\varphi_t\,\sin\theta_t \\ \cos\theta_t \end{pmatrix} \;=\; r_t\,\vec{e}_r \tag{4}$$

Anstatt $\vec{e}_{r_t}$ schreiben wir einfach $\vec{e}_r$ im folgenden, die Zeitabhängigkeit der Parameter sei von jetzt an also immer vorausgesetzt. Wir berechnen zunächst die zeitlichen Ableitungen der Basisvektoren. Wir haben

$$\dot{\vec{e}_r} \;=\; \dot\varphi \begin{pmatrix} -\sin\varphi\,\sin\theta \\ \cos\varphi\,\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \dot\theta \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\theta \\ \sin\varphi\,\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \;=\; \dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot\theta\,\vec{e}_\theta$$

$$\dot{\vec{e}_\varphi} \;=\; \dot\varphi \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \dot\varphi\left\{-\sin\theta\,\vec{e}_r - \cos\theta\,\vec{e}_\theta\right\}$$

$$\dot{\vec{e}_\theta} \;=\; \dot\varphi\,\cos\theta \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} - \dot\theta \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\sin\theta \\ \sin\varphi\,\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \;=\; \dot\varphi\,\cos\theta\,\vec{e}_\varphi - \dot\theta\,\vec{e}_r$$

Zusammengefasst,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}_r} &= \dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot\theta\,\vec{e}_\theta \\ \dot{\vec{e}_\varphi} &= -\dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_r - \dot\varphi\,\cos\theta\,\vec{e}_\theta \\ \dot{\vec{e}_\theta} &= \dot\varphi\,\cos\theta\,\vec{e}_\varphi - \dot\theta\,\vec{e}_r \end{aligned} \tag{5}$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned} \vec{x} &= r\,\vec{e}_r \\ \dot{\vec{x}} &= \dot r\,\vec{e}_r + r\,\dot{\vec{e}_r} \\ \ddot{\vec{x}} &= \ddot r\,\vec{e}_r + 2\,\dot r\,\dot{\vec{e}_r} + r\,\ddot{\vec{e}_r} \end{aligned}$$

und weiterhin

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{x}} &= \ddot r\,\vec{e}_r + 2\,\dot r\,\dot{\vec{e}_r} + r\,\ddot{\vec{e}_r} \\ &= \ddot r\,\vec{e}_r + 2\,\dot r\left\{\dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot\theta\,\vec{e}_\theta\right\} + r\,\tfrac{d}{dt}\left\{\dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot\theta\,\vec{e}_\theta\right\} \\ &= \ddot r\,\vec{e}_r + 2\,\dot r\,\dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + 2\,\dot r\,\dot\theta\,\vec{e}_\theta \\ &\quad + r\Big\{\,\ddot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot\varphi\,\dot\theta\,\cos\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot\varphi\,\sin\theta\,\dot{\vec{e}_\varphi} + \ddot\theta\,\vec{e}_\theta + \dot\theta\,\dot{\vec{e}_\theta}\,\Big\} \\ &= \ddot r\,\vec{e}_r + \left\{2\,\dot r\,\dot\varphi\,\sin\theta + r\,\ddot\varphi\,\sin\theta + r\,\dot\varphi\,\dot\theta\,\cos\theta\right\}\vec{e}_\varphi + \left\{2\,\dot r\,\dot\theta + r\,\ddot\theta\,\right\}\vec{e}_\theta \\ &\quad + r\,\dot\varphi\,\sin\theta\,\dot{\vec{e}_\varphi} + r\,\dot\theta\,\dot{\vec{e}_\theta} \\ &= \ddot r\,\vec{e}_r + \left\{2\,\dot r\,\dot\varphi\,\sin\theta + r\,\ddot\varphi\,\sin\theta + r\,\dot\varphi\,\dot\theta\,\cos\theta\right\}\vec{e}_\varphi + \left\{2\,\dot r\,\dot\theta + r\,\ddot\theta\,\right\}\vec{e}_\theta \\ &\quad + r\,\dot\varphi\,\sin\theta\left[-\dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_r - \dot\varphi\,\cos\theta\,\vec{e}_\theta\right] + r\,\dot\theta\left[\dot\varphi\,\cos\theta\,\vec{e}_\varphi - \dot\theta\,\vec{e}_r\right] \end{aligned}$$

Wir sammeln die Beiträge zu den jeweiligen Basisvektoren $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta\}$ und bekommen damit das folgende

**Lemma 2.1.3:** In Kugelkoordinaten gilt:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{x}} \;=\;& \left\{\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta - r\,\dot{\theta}^2\right\} \vec{e}_r \\ &+ \left\{2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}\,\sin\theta + r\,\ddot{\varphi}\,\sin\theta + 2\,r\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\,\cos\theta\right\} \vec{e}_\varphi \\ &+ \left\{2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta} - r\,\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta\right\} \vec{e}_\theta\end{aligned} \tag{6}$$

Also: Wenn wir eine kräftefreie Bewegung haben, gilt die Gleichung $m\,\ddot{\vec{x}} = 0$ und nach Lemma 2.1.3 ist das äquivalent zu

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta - r\,\dot{\theta}^2 &= 0 \\ 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}\,\sin\theta + r\,\ddot{\varphi}\,\sin\theta + 2\,r\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\,\cos\theta &= 0 \\ 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta} - r\,\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta &= 0\end{aligned} \tag{7}$$

Mit Hilfe des Lagrange-Formalismus lässt sich dieses Resultat deutlich schneller herleiten: Die Lagrange-Funktion $L$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}L &= \text{kinetische Energie} - \text{potentielle Energie} \\ &= T - V \\ &\overset{V=0}{=} T \\ &= \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^2\end{aligned} \tag{8}$$

Wir haben

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\vec{e}}_r \\ &\overset{(5)}{=} \dot{r}\,\vec{e}_r + r\left\{\dot{\varphi}\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\right\}\end{aligned}$$

und da die Vektoren $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta\}$ eine Orthonormalbasis bilden, folgt sofort

$$L = \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^2 = \tfrac{m}{2}\left\{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\right\} \tag{9}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \tfrac{\partial L}{\partial r} &= 0 \\ \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \tfrac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \\ \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \tfrac{\partial L}{\partial \theta} &= 0\end{aligned} \tag{10}$$

Das $m/2$ können wir weg dividieren und das System (10) ist dann äquivalent zu

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\left\{2\,\dot{r}\right\} - 2\,r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - 2\,r\dot{\theta}^2 &= 0 \\ \tfrac{d}{dt}\left\{2\,r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta\right\} - 0 &= 0 \\ \tfrac{d}{dt}\left\{2\,r^2\dot{\theta}\right\} - 2\,r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta &= 0\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \ddot r \;-\; r\dot\varphi^2\sin^2\theta \;-\; r\dot\theta^2 \;&=\; 0 \\ \tfrac{d}{dt}\big\{\, r^2\dot\varphi\sin^2\theta \,\big\} \;&=\; 0 \\ \tfrac{d}{dt}\big\{\, r^2\dot\theta \,\big\} \;-\; r^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta \;&=\; 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Die erste Gleichung von (11) ist exakt identisch mit der ersten Gleichung von (7). Wenn wir die Zeitableitung in der zweiten Gleichung von (11) machen, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \tfrac{d}{dt}\big\{\, r^2\dot\varphi\sin^2\theta \,\big\} \\ &=\; 2r\dot r\dot\varphi\sin^2\theta \;+\; r^2\ddot\varphi\sin^2\theta \;+\; 2\,r^2\dot\varphi\,\dot\theta\,\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

oder

$$2\dot r\dot\varphi\sin\theta \;+\; r\ddot\varphi\sin\theta \;+\; 2\,r\dot\varphi\,\dot\theta\,\cos\theta \;=\; 0 \tag{12}$$

und das ist exakt identisch mit der zweiten Zeile von (7). Die Äquivalenz der dritten Gleichungen folgt dann aus $\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta) = 2r\dot r\dot\theta \,+\, r^2\ddot\theta$.

**Bemerkungen:**

**1)** Letzte Woche hatten wir die Euler-Lagrange-Gleichungen nur für den Spezialfall hergeleitet, dass sich ein Teilchen im $\mathbb{R}^3$ auf einer 2-dimensionalen Fläche bewegt. Die verallgemeinerten Koordinaten waren da $(q_1, q_2) = (u, v)$. Hier haben wir ja eine Situation, wo wir die Euler-Lagrange-Gleichungen für 3 verallgemeinerte Koordinaten $(q_1, q_2, q_3) = (r, \varphi, \theta)$ hingeschrieben haben, das scheint also auch zu funktionieren. Tatsächlich ist es so, dass der Formalismus auch dann noch funktioniert, wenn man die Bewegung von $N$ Teilchen auf einer $f$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{3N}$ betrachtet, das schauen wir uns nächste Woche dann nochmal an. Man hat dann also $f$ verallgemeinerte Koordinaten $q_1, \cdots, q_f$ und bekommt dann $f$ Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot q_i} \;-\; \tfrac{\partial L}{\partial q_i} \;=\; 0\,, \qquad i = 1, \cdots, f\,. \tag{13}$$

**2)** Die zweite Gleichung von (11) lautet

$$\tfrac{d}{dt}\big\{\, r^2\dot\varphi\sin^2\theta \,\big\} \;=\; 0$$

oder

$$r^2\dot\varphi\sin^2\theta \;=\; \text{constant}\,, \tag{14}$$

wir haben also eine Erhaltungsgrösse. Erhaltungsgrössen bekommt man offensichtlich immer sofort aus den Euler-Lagrange-Gleichungen, wenn die Lagrange-Funktion $L$ von einem speziellen $q_i$ nicht abhängt, weil dann $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ist. In unserem Fall war $L$ von $\varphi$ unabhängig. Man sagt dann auch, das entsprechende $q_i$, also hier das $\varphi$, ist eine 'zyklische Koordinate'. In den Übungen zeigen wir, dass in diesem Fall die Erhaltungsgrösse durch die z-Koordinate des Bahndrehimpulses gegeben ist.

**Beispiel 2: Bewegung eines Teilchens unter dem Einfluss der Schwerkraft in einer halbkugelförmigen Schüssel (sphärisches Pendel)**

Wie in dem letzten Beispiel parametrisieren wir die Bewegung durch Kugelkoordinaten,

$$\vec{x}_t \;=\; \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} \;=\; R \begin{pmatrix} \cos\varphi_t \, \sin\theta_t \\ \sin\varphi_t \, \sin\theta_t \\ \cos\theta_t \end{pmatrix} \tag{15}$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi_t &\in [0, 2\pi) \\ \theta_t &\in \left[\tfrac{\pi}{2}, \pi\right] \qquad \text{nur die untere Kugel-Hälfte} \end{aligned}$$

Der Radius $R$ ist in diesem Fall aber nicht variabel, sondern ist gegeben durch den Radius der Schüssel, die wir ja als halbkugelförmig vorausgesetzt haben. Die Schwerkraft wirke wie üblich in Richtung der negativen z-Achse und ist also gegeben durch $\vec{F} = (0, 0, -mg) = -\nabla V(\vec{x})$ mit dem Potential

$$V(\vec{x}) \;=\; V(x, y, z) \;=\; mg\, z \;=\; mg\, R\, \cos\theta \tag{16}$$

Damit erhalten wir also die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L &= \text{kinetische Energie} \;-\; \text{potentielle Energie} \\ &= T - V \\ &= \tfrac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 \;-\; mg\, z \\ &\overset{(9)}{=} \tfrac{m}{2} \left\{ \dot{r}^2 \;+\; r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta \;+\; r^2 \dot{\theta}^2 \right\} \;-\; mg\, R\, \cos\theta \\ &= \tfrac{m}{2} \left\{ 0 \;+\; R^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta \;+\; R^2 \dot{\theta}^2 \right\} \;-\; mg\, R\, \cos\theta \\ &= \tfrac{m}{2} R^2 \left\{ \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta \;+\; \dot{\theta}^2 \right\} \;-\; mg\, R\, \cos\theta \end{aligned} \tag{17}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind gegeben durch

$$\tfrac{d}{dt} \tfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \;-\; \tfrac{\partial L}{\partial \varphi} \;=\; 0 \tag{18}$$

$$\tfrac{d}{dt} \tfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \;-\; \tfrac{\partial L}{\partial \theta} \;=\; 0 \tag{19}$$

Die Masse $m$ können wir wieder weg dividieren und das System (18,19) ist dann äquivalent zu

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt} \left\{ R^2 \dot{\varphi} \sin^2\theta \right\} \;-\; 0 &= 0 \\ \tfrac{d}{dt} \left\{ R^2 \dot{\theta} \right\} \;-\; R^2 \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta \;-\; gR \sin\theta &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\tfrac{d}{dt} \left\{ \dot{\varphi} \sin^2\theta \right\} \;=\; 0 \tag{20}$$

$$\ddot{\theta} \;-\; \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta \;-\; \tfrac{g}{R} \sin\theta \;=\; 0 \tag{21}$$

Aus Gleichung (20) folgt

$$\dot{\varphi} \quad = \quad \frac{c}{\sin^2\theta} \tag{22}$$

wobei $c$ eine Erhaltungsgrösse ist, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt ist. Wir können (22) in (21) einsetzen und bekommen

$$\ddot{\theta} \ - \ \frac{c^2}{\sin^4\theta} \sin\theta\cos\theta \ - \ \frac{g}{R}\sin\theta \quad = \quad 0$$

oder

$$\ddot{\theta} \ - \ c^2\,\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} \ - \ \frac{g}{R}\sin\theta \quad = \quad 0 \tag{23}$$

Aus Gleichung (23) können wir eine weitere Erhaltungsgrösse gewinnen, indem wir die Gleichung mit $\dot{\theta}$ multiplizieren:

$$\begin{aligned} & \dot{\theta}\,\ddot{\theta} \ - \ \left\{c^2\,\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} \ + \ \frac{g}{R}\sin\theta\right\}\dot{\theta} \quad = \quad 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\,\dot{\theta}^2 \ + \ \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{\sin^2\theta} \ + \ \frac{g}{R}\cos\theta\right\} \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

Also bekommen wir

$$\frac{1}{2}\,\dot{\theta}^2 \ + \ \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{\sin^2\theta} \ + \ \frac{g}{R}\cos\theta \quad = \quad E \quad = \quad \text{constant} \tag{24}$$

Wir diskutieren das Lösungsverhalten der Bewegungsgleichungen ein bischen auf dem neuen Übungsblatt.