# week2: Kurze Erinnerung Newtonsche Mechanik

## Herleitung der Schwerkraft aus der Gravitationskraft

Da wir im weiteren Verlauf der Vorlesung in vielen Beispielen die Bewegung einer Punktmasse unter dem Einfluss der Schwerkraft betrachten werden, wollen wir an dieser Stelle noch die Schwerkraft aus der Gravitationskraft ableiten. Dazu lösen wir die folgende Übungsaufgabe.

**Aufgabe:** Wir wollen die Schwerkraft $F = mg$, mit $g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ die Erdbeschleunigung, aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz

$$\vec{F}_{21} \;=\; -\,G\,m_1\,m_2\,\frac{\vec{x}_2-\vec{x}_1}{\|\vec{x}_2-\vec{x}_1\|^3} \tag{1}$$

herleiten. Dabei ist $\vec{F}_{21}$ die Kraft, die von der Punktmasse $m_1$ auf die Punktmasse $m_2$ ausgeübt wird und $G$ ist die Gravitationskonstante gegeben durch

$$G \;=\; 6.674\times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

Wir betrachten den Fall mit $m_1 = M =$ Erdmasse und $m_2 = m$ ist eine Probemasse, die etwa in einem Labor auf einem Tisch liegt. Wir können $m_1 = M$ nicht mehr als Punktmasse ansehen und schreiben deshalb

$$M \;=\; \textstyle\int_{\mathrm{Erde}} dM(\vec{x}_1)$$

mit kleinen Massestückchen $dM(\vec{x}_1)$, die wir dann als punktförmig ansehen wollen. Nach Gleichung (1) übt dann so ein Massestückchen $dM$ die Kraft

$$d\vec{F} \;=\; d\vec{F}_{21} \;=\; -\,G\,dm_1\,m_2\,\frac{\vec{x}_2-\vec{x}_1}{\|\vec{x}_2-\vec{x}_1\|^3} \;=\; -G\,dM(\vec{x}_1)\,m\,\frac{\vec{x}-\vec{x}_1}{\|\vec{x}-\vec{x}_1\|^3}$$

auf die Probemasse $m = m_2$ aus, wenn sich das $m$ an der Stelle $\vec{x} := \vec{x}_2$ befindet. Die Gesamtkraft, die auf das $m$ an der Stelle $\vec{x}$ wirkt, ist dann also gegeben durch

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{x}) \;=\; \int_{\mathrm{Erde}} d\vec{F} \;&=\; -\,G\,m\int_{\mathrm{Erde}} dM(\vec{x}_1)\,\frac{\vec{x}-\vec{x}_1}{\|\vec{x}-\vec{x}_1\|^3}\\ &=\; -\,G\,m\,\rho\int_{\mathrm{Erde}} d^3x_1\,\frac{\vec{x}-\vec{x}_1}{\|\vec{x}-\vec{x}_1\|^3}\end{aligned} \tag{2}$$

wenn $\rho = Masse/Volumen = dM/dV = dM/d^3x_1$ die Dichte der Erde bezeichnet, die wir als konstant ansehen wollen. Wir nehmen an, dass die Erde eine Kugel mit Radius

$$R \;=\; 6371\,\mathrm{km}$$

ist, aus Symmetriegründen hängt die Kraft $\vec{F}$ in (2) dann nur von $r := \|\vec{x}\|$ ab, $\vec{F} = \vec{F}(r)$, wenn wir den Mittelpunkt von $M$ in den Koordinatenursprung legen.

**a)** Es sei $F(r) = |\vec{F}(r)|$. Zeigen Sie: Für $r \geq R$ gilt

$$F(r) \;=\; G\,m\,\rho\,\frac{4\pi}{3}R^3 \times \frac{1}{r^2} \;=\; G\,m\,\frac{M}{r^2} \tag{3}$$

Im Fall $r \geq R$ kann man sich also doch die Erde als Punktmasse $M$ im Koordinatenursprung $\vec{x}_1 = \vec{0}$ vorstellen, die Gleichung (1) liefert dann dasselbe Resultat.

**b)** Die Probemasse $m = m_2$ befinde sich jetzt in einer Höhe $h$ über der Erdoberfläche, etwa $h = 1\mathrm{m}$. Wir betrachten also den Fall $r = R + h$ mit $h \ll R$. Zeigen Sie:

$$F(r) \;\approx\; G\,m\,\frac{M}{R^2}\left[1 \;-\; 2\frac{h}{R}\right] \;\approx\; G\,m\,\frac{M}{R^2} \;=\; g\,m \tag{4}$$

mit

$$g \;=\; G\,\frac{M}{R^2} \;\approx\; 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\;.$$

Die Erdmasse beträgt

$$M \;=\; 5.9722 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}\;.$$

**Lösung:** Nach Annahme haben wir

$$\text{Erde} \;=\; K_R(0) \;:=\; \left\{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| \leq R \,\right\}$$

mit $K_R(0)$ die Kugel mit Radius $R$ um den Ursprung. Wir müssen berechnen

$$\vec{F}(\vec{x}) \;=\; k \int_{K_R(0)} d^3x_1\,\frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{\|\vec{x} - \vec{x}_1\|^3} \tag{5}$$

mit der Konstanten

$$k \;:=\; -G\,m\,\rho_{\text{Erde}} \tag{6}$$

Wir wollen uns zunächst überlegen, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Annahme $\vec{x} = (0, 0, r)$ machen können. Dazu sei $D \in SO(3)$ eine beliebige Drehmatrix. Es gilt dann $\|D\vec{y}\| = \|\vec{y}\|$ für alle $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ und

$$\begin{aligned} D^T &= D^{-1} \\ \det D &= 1 \end{aligned}$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
\vec{F}(D\vec{x}) \quad &= \quad k \int_{K_R(0)} d^3x_1 \, \frac{D\vec{x} - \vec{x}_1}{\|D\vec{x} - \vec{x}_1\|^3} \\
&\overset{\vec{x}_1 = D\vec{y}}{=} \quad k \int_{K_R(0)} d^3(Dy) \, \frac{D\vec{x} - D\vec{y}}{\|D\vec{x} - D\vec{y}\|^3} \\
&\overset{\det D = 1}{=} \quad k \int_{K_R(0)} d^3y \, \frac{D(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \\
&= \quad D \left\{ k \int_{K_R(0)} d^3y \, \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \right\} \quad = \quad D\,\vec{F}(\vec{x})
\end{aligned}$$

also

$$\vec{F}(D\vec{x}) \quad = \quad D\,\vec{F}(\vec{x}) \tag{7}$$

und damit auch

$$\|\vec{F}(D\vec{x})\| \quad = \quad \|D\,\vec{F}(\vec{x})\| \quad = \quad \|\vec{F}(\vec{x})\| \tag{8}$$

für jede Drehmatrix $D \in SO(3)$. Wir wählen $D$ dann so, dass

$$D\vec{x} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

gilt mit $r = \|\vec{x}\|$ . Aus Gleichung (8) bekommen wir dann also

$$\|\vec{F}(\vec{x})\| \quad = \quad \|\vec{F}(D\vec{x})\| \quad = \quad \|\vec{F}(0,0,r)\| \quad = \quad F(r) \tag{9}$$

Zur Berechnung von $\vec{F}(0,0,r)$ wählen wir Kugelkoordinaten,

$$\vec{y} \quad = \quad \rho \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned}
\rho \quad &\in \quad [0, R] \\
\varphi \quad &\in \quad [0, 2\pi] \\
\theta \quad &\in \quad [0, \pi]
\end{aligned}$$

und

$$d^3y \quad = \quad \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \quad .$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \quad &= \quad \rho^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta \; + \; \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta \; + \; (r - \rho\cos\theta)^2 \\
&= \quad \rho^2 \sin^2\theta \; + \; (r - \rho\cos\theta)^2 \\
&= \quad \rho^2 \sin^2\theta \; + \; r^2 \; - \; 2r\rho\cos\theta \; + \; \rho^2\cos^2\theta \\
&= \quad \rho^2 \; + \; r^2 \; - \; 2r\rho\cos\theta
\end{aligned}$$

und wir müssen folgendes Integral berechnen, mit $\vec{x} = (0,0,r)$:

$$\begin{aligned}
\vec{F}(0,0,r) &= k \int_{K_R(0)} d^3y \, \frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} \\
&= k \int_0^R d\rho \, \rho^2 \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{1}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{3/2}} \begin{pmatrix} -\rho\cos\varphi\sin\theta \\ -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ r-\rho\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= k \int_0^R d\rho \, \rho^2 \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta \, \frac{1}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{3/2}} \begin{pmatrix} -\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\sin\theta \\ -\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\sin\varphi\sin\theta \\ 2\pi(r-\rho\cos\theta) \end{pmatrix} \\
&= k \int_0^R d\rho \, \rho^2 \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta \, \frac{1}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi(r-\rho\cos\theta) \end{pmatrix} \\
&=: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F(r) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

mit

$$F(r) \;=\; 2\pi k \int_0^R d\rho \, \rho^2 \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta \, \frac{r-\rho\cos\theta}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{3/2}} \tag{10}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left\{ \frac{1}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{1/2}} \right\} &= -\,\frac{1}{2}\,\frac{2r-2\rho\cos\theta}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{3/2}} \\
&= -\,\frac{r-\rho\cos\theta}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{3/2}}
\end{aligned}$$

können wir Gleichung (10) auch folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned}
F(r) &= -2\pi k \int_0^R d\rho \, \rho^2 \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta \, \frac{d}{dr}\left\{ \frac{1}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{1/2}} \right\} \\
&= -2\pi k \, \frac{d}{dr}\left\{ \int_0^R d\rho \, \rho^2 \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta \, \frac{1}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{1/2}} \right\} \\
&=: -2\pi k \, \frac{d}{dr} \, I(r)
\end{aligned} \tag{11}$$

mit dem Integral

$$
\begin{aligned}
I(r) \quad &= \quad \int_0^R d\rho\, \rho^2 \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta\, \frac{1}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{1/2}} \\
&\overset{u=\cos\theta}{=} \quad - \int_0^R d\rho\, \rho^2 \int_1^{-1} du\, \frac{1}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\, u)^{1/2}} \\
&= \quad + \int_0^R d\rho\, \rho^2 \int_{-1}^{1} du\, \frac{1}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\, u)^{1/2}} \\
&= \quad \int_0^R d\rho\, \rho^2\, \frac{2}{-2r\rho}\, (\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\, u)^{1/2} \Big|_{u=-1}^{u=1} \\
&= \quad - \frac{1}{r} \int_0^R d\rho\, \rho\, (\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\, u)^{1/2} \Big|_{u=-1}^{u=1} \\
&= \quad - \frac{1}{r} \int_0^R d\rho\, \rho\, \Big\{ (\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho)^{1/2} \,-\, (\rho^2 \,+\, r^2 \,+\, 2r\rho)^{1/2} \Big\} \\
&= \quad - \frac{1}{r} \int_0^R d\rho\, \rho\, \{\, |r-\rho| \,-\, |r+\rho|\, \} \\
&= \quad + \frac{1}{r} \int_0^R d\rho\, \rho\, \{\, |r+\rho| \,-\, |r-\rho|\, \} \\
&\overset{\rho\le R\le r}{=} \quad \frac{1}{r} \int_0^R d\rho\, \rho\, \{\, r+\rho \,-\, (r-\rho)\, \} \\
&= \quad \frac{1}{r} \int_0^R d\rho\, 2\rho^2 \quad = \quad \frac{1}{r}\, \frac{2R^3}{3}
\end{aligned} \tag{12}
$$

Gleichung (12) eingesetzt in (11) liefert

$$
\begin{aligned}
F(r) \quad &= \quad -\,2\pi k\, \frac{d}{dr}\, I(r) \quad = \quad k\, \frac{1}{r^2}\, \frac{4\pi R^3}{3} \\
&\overset{(6)}{=} \quad -\,G\, m\, \rho_{\text{Erde}}\, \frac{1}{r^2}\, \frac{4\pi R^3}{3} \\
&= \quad -\,G\, m\, \frac{M}{r^2}
\end{aligned} \tag{13}
$$

Wir haben hier ein Minuszeichen, da wir das $F(r)$ nicht als den Betrag von $\vec{F}$ definiert hatten, sondern einfach als die z-Komponente von $\vec{F}$.

**b)** Mit $r = R + h$ und $h \ll R$ haben wir dann noch

$$
\frac{1}{r^2} \quad = \quad \frac{1}{(R+h)^2} \quad = \quad \frac{1}{R^2}\, \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}
$$

mit $\varepsilon := h/R \ll 1$. Wegen

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \quad &= \quad (1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \pm \cdots)^2 \\
&= \quad 1 \,-\, 2\varepsilon \,+\, O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

folgt dann die Behauptung.