week12: Kapitel 3.3: Die Hamilton-Jakobi-Gleichung

(dieses Material ist nicht mehr klausurrelevant)

Das klassische Wirkungsintegral

Das klassische Wirkungsintegral oder einfach die klassische Wirkung (klassisch meint hier nicht quantenmechanisch, in der QM wird diese Grösse ebenfalls diskutiert) ist gegeben durch

$$S \;=\; \int_{t_0}^{t} L(q_s, \dot{q}_s)\, ds \tag{1}$$

wobei das $L = L(q_t, \dot{q}_t)$ die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems ist und das $q_t = (q_{1,t}, \cdots, q_{f,t})$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung ist,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \;=\; 0 \qquad \forall j = 1, \cdots, f \tag{2}$$

Schauen wir uns zunächst ein Beispiel an (ein Beispiel 2 gibt es auf dem neuen Ü-Blatt 12):

Beispiel 1: Bewegung im Schwerefeld der Erde: Die Bewegungsgleichung ist

$$m\ddot{\vec{x}} \;=\; m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}0\\ 0\\ -mg\end{pmatrix} \tag{3}$$

oder

$$\ddot{\vec{x}} \;=\; -g\,\vec{e}_z \tag{4}$$

mit $\vec{e}_z = (0,0,1)$ und den Anfangsbedingungen, sagen wir,

$$\begin{aligned}\vec{x}_{t=0} &= \vec{x}_0\\ \dot{\vec{x}}_{t=0} &= \vec{v}_0\end{aligned} \tag{5}$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_t &= \vec{v}_0 \,-\, gt\,\vec{e}_z\\ \vec{x}_t &= \vec{x}_0 \,+\, \vec{v}_0\, t \,-\, \tfrac{gt^2}{2}\,\vec{e}_z\end{aligned} \tag{6}$$

Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned}L(\vec{x}_t, \dot{\vec{x}}_t) &= \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}_t^{\,2} \,-\, mgz_t\\ &= \tfrac{m}{2}\,[\,\vec{v}_0 \,-\, gt\,\vec{e}_z\,]^2 \,-\, mg\left[\,\vec{x}_0 \,+\, \vec{v}_0\, t \,-\, \tfrac{gt^2}{2}\,\vec{e}_z\,\right]_3\end{aligned} \tag{7}$$

oder

$$L(\vec{x}_t, \dot{\vec{x}}_t)\,/\,m \;=\; \tfrac{1}{2}\,\{\,\vec{v}_0^{\,2} \,-\, 2gt\,v_{0,z} \,+\, g^2t^2\,\} \,-\, g\,\{\,z_0 \,+\, v_{0,z}\,t \,-\, \tfrac{gt^2}{2}\,\} \tag{8}$$

Also,

$$\begin{aligned} S/m \;&=\; \textstyle\int_{t_0:=0}^{t} L(q_s,\dot{q}_s)/m\;ds \\ &=\; \tfrac{1}{2}\,\{\,\vec{v}_0^{\,2}\,t \,-\, g\,t^2\,v_{0,z} \,+\, g^2\,\tfrac{t^3}{3}\,\} \,-\, g\,\{\,z_0\,t \,+\, v_{0,z}\,\tfrac{t^2}{2} \,-\, g\,\tfrac{t^3}{6}\,\} \\ &=\; \tfrac{1}{2}\,\vec{v}_0^{\,2}\,t \,-\, g\,t^2\,v_{0,z} \,-\, g\,t\,z_0 \,+\, g^2\,\tfrac{t^3}{3} \end{aligned} \tag{9}$$

Offensichtlich hängt das S ab von den Anfangsbedingungen $\vec{x}_0$ und $\vec{v}_0$ und dem betrachteten Zeithorizont t, das wird immer so sein. Jetzt wollen wir das $\vec{v}_0$ aus (9) entfernen und dafür den Endpunkt $\vec{x}_t$ gegeben durch Gleichung (6) in das S reinschreiben. Also wir wollen die Gleichung (6)

$$\vec{x}_t \;=\; \vec{x}_t(\vec{x}_0,\vec{v}_0) \;=\; \vec{x}_0 \,+\, \vec{v}_0\,t \,-\, \tfrac{gt^2}{2}\,\vec{e}_z$$

nach $\vec{v}_0$ auflösen,

$$\vec{v}_0 \;=\; \vec{v}_0(\vec{x}_0,\vec{x}_t,t) \;=\; \frac{\vec{x}_t \,-\, \vec{x}_0 \,+\, \frac{gt^2}{2}\,\vec{e}_z}{t} \;=\; \frac{\vec{x}_t \,-\, \vec{x}_0}{t} \,+\, \frac{gt}{2}\,\vec{e}_z \tag{10}$$

und das dann in das S einsetzen, dann bekommen wir eine Funktion, die nur noch vom Startpunkt $\vec{x}_0$, vom Endpunkt $\vec{x}_t$ der tatsächlich durchlaufenden Bahnkurve $\{\vec{x}_s\}_{0\leq s\leq t}$ und dem Zeithorizont t abhängt:

$$S/m \;=\; S(\vec{x}_0,\vec{x}_t,t)/m \;=\; \tfrac{t}{2}\,[\vec{v}_0(\vec{x}_0,\vec{x}_t,t)]^2 \,-\, gt^2\,[\vec{v}_0(\vec{x}_0,\vec{x}_t,t)]_z \,-\, gt\,z_0 \,+\, \tfrac{g^2t^3}{3} \tag{11}$$

oder, wenn wir das $\vec{v}_0(\vec{x}_0,\vec{x}_t,t)$ aus Gleichung (10) konkret einsetzen,

$$\begin{aligned} S(\vec{x}_0,\vec{x}_t,t)/m \;&=\; \tfrac{t}{2}\,\big[\,\tfrac{\vec{x}_t-\vec{x}_0}{t} \,+\, \tfrac{gt}{2}\,\vec{e}_z\,\big]^2 \,-\, gt^2\,\big[\,\tfrac{\vec{x}_t-\vec{x}_0}{t} \,+\, \tfrac{gt}{2}\,\vec{e}_z\,\big]_z \,-\, gt\,z_0 \,+\, \tfrac{g^2t^3}{3} \\ &=\; \tfrac{(\vec{x}_t-\vec{x}_0)^2}{2t} \,+\, \tfrac{gt}{2}\,(z_t-z_0) \,+\, \tfrac{g^2t^3}{8} \,-\, gt(z_t-z_0) \,-\, \tfrac{g^2t^3}{2} \,-\, gt\,z_0 \,+\, \tfrac{g^2t^3}{3} \\ &=\; \tfrac{(\vec{x}_t-\vec{x}_0)^2}{2t} \,-\, \tfrac{gt}{2}\,(z_t-z_0) \,+\, \tfrac{3g^2t^3}{24} \,-\, \tfrac{12g^2t^3}{24} \,-\, gt\,z_0 \,+\, \tfrac{8g^2t^3}{24} \\ &=\; \tfrac{(\vec{x}_t-\vec{x}_0)^2}{2t} \,-\, \tfrac{gt}{2}\,(z_t+z_0) \,-\, \tfrac{g^2t^3}{24} \end{aligned} \tag{12}$$

Also,

$$S(\vec{x}_0,\vec{x}_t,t) \;=\; \tfrac{m}{2}\,\Big\{\,\tfrac{(\vec{x}_t-\vec{x}_0)^2}{t} \,-\, gt\,(z_t+z_0) \,-\, \tfrac{g^2t^3}{12}\,\Big\} \tag{13}$$

Hamilton-Jacobi-Gleichung

Kehren wir zum allgemeinen Setting zurück gegeben durch (1) und (2). Die Hamilton-Funktion ist

$$H \;=\; \textstyle\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\dot{q}_j \;-\; L \tag{14}$$

Das ist zunächst mal, genauso wie das $L = L(q_t, \dot{q}_t)$, ebenfalls eine Funktion von q_t und $\dot{q}_t$. Im Kapitel 3.1 hatten wir gesehen, dass die natürlichen Variablen für die Hamilton-Funktion die $q_{j,t}$ und die verallgemeinerten Impulse

$$p_{j,t} \;:=\; \tfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{15}$$

sind, die $\dot{q}_{j,t}$ kann man, zumindest im Prinzip, aus den Gleichungen (15) als Funktion der $q_{j,t}$ und $p_{j,t}$ schreiben und dann in das H einsetzen, wir haben dann also

$$H \;=\; \textstyle\sum_{j=1}^{f} p_{j,t}\,\dot{q}_{j,t} \;-\; L\big(\, q_t \,,\, \dot{q}(q_t, p_t)\,\big) \;=\; H(q_t, p_t) \tag{16}$$

Berechnen wir eben die Hamilton-Funktion für das Beispiel 1:

Beispiel 1, Hamilton-Funktion: Mit

$$L(\vec{x}_t, \dot{\vec{x}}_t) \;=\; \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}_t^{\,2} \;-\; mgz_t \;=\; \tfrac{m}{2}\,[\,\dot{x}_t^2 \,+\, \dot{y}_t^2 \,+\, \dot{z}_t^2\,] \,-\, mg\,z_t \tag{17}$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} p_{x,t} &= m\dot{x}_t \\ p_{y,t} &= m\dot{y}_t \\ p_{z,t} &= m\dot{z}_t \end{aligned} \tag{18}$$

und

$$H(\vec{x}_t, \vec{p}_t) \;=\; \tfrac{\vec{p}_t^{\,2}}{2m} \;+\; mgz_t \;=\; \tfrac{1}{2m}\,[\,p_{x,t}^2 \,+\, p_{y,t}^2 \,+\, p_{z,t}^2\,] \,+\, mg\,z_t \tag{19}$$

Die Hamilton-Jakobi-Gleichung ist dann durch das folgende Theorem gegeben:

Theorem 3.3.1 (Hamilton-Jacobi-Gleichung): Es sei

$$L \;=\; L(q, \dot{q}) \;=\; L(q_1, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_f) \;:\; \mathbb{R}^{2f} \;\to\; \mathbb{R} \tag{20}$$

eine beliebige Funktion. Es sei $t < +\infty$ eine vorgegebene Zeit und $(q_s, \dot{q}_s)_{0 \le s \le t}$ sei eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\tfrac{d}{dt}\,\tfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \,-\, \tfrac{\partial L}{\partial q_j} \;=\; 0 \quad \forall j = 1, \cdots, f \tag{21}$$

auf dem Intervall $[0,t]$ zu den Anfangsbedingungen

$$(q_{s=0}, \dot q_{s=0}) \;\;=\;\; (q_0, \dot q_0) \tag{22}$$

Wir setzen diese Lösung in die Lagrange-Funktion ein und definieren das Wirkungsintegral

$$S \;\;=\;\; \int_0^t L(q_s, \dot q_s)\, ds \;\;=:\;\; \tilde S(q_0, \dot q_0, t) \tag{23}$$

was zunächst mal eine Funktion der Anfangsbedingungen und des Zeithorizonts t ist. Wir lösen die Gleichung

$$q_t \;\;=\;\; q_t(q_0, \dot q_0) \tag{24}$$

nach den $\dot q_0$ auf,

$$\dot q_0 \;\;=\;\; \dot q_0(q_0, q_t) \tag{25}$$

und bekommen dann das Wirkungsintegral (23) als Funktion von q_0, q_t und t:

$$S(q_0, q_t, t) \;\;:=\;\; \tilde S\big(\, q_0 \,,\, \dot q_0(q_0, q_t) \,,\, t \,\big) \tag{26}$$

Mit der Hamilton-Funktion

$$H \;\;=\;\; \sum_{j=1}^f p_{j,t}\, \dot q_{j,t} \;-\; L\big(\, q_t \,,\, \dot q(q_t, p_t) \,\big) \;\;=\;\; H(q_t, p_t) \tag{27}$$

und den verallgemeinerten Impulsen $p_{j,t} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}$ gilt dann:

$$\nabla_{q_t} S \;\;=\;\; p_t \tag{28}$$

und

$$H\big(\, q_t \,, \nabla_{q_t} S(q_0, q_t, t) \,\big) \;+\; \tfrac{\partial S}{\partial t}(q_0, q_t, t) \;\;=\;\; 0 \tag{29}$$

Die Identität (29) wird als die Hamilton-Jacobi-Gleichung bezeichnet.

Überprüfen wir die Identitäten (28) und (29) zunächst mal für unser Beispiel 1:

Beispiel 1, Hamilton-Jacobi-Gleichung: Das S war gegeben durch (13),

$$S(\vec x_0, \vec x_t, t) \;\;=\;\; \tfrac{m}{2} \left\{ \tfrac{(\vec x_t - \vec x_0)^2}{t} \;-\; gt\,(z_t + z_0) \;-\; \tfrac{g^2 t^3}{12} \right\}$$

und die Hamilton-Funktion hatten wir in (19) berechnet,

$$H(\vec x_t, \vec p_t) \;\;=\;\; \tfrac{\vec p_t^{\,2}}{2m} \;+\; mgz_t \;\;=\;\; \tfrac{1}{2m}\,[\, p_{x,t}^2 \;+\; p_{y,t}^2 \;+\; p_{z,t}^2 \,] \;+\; mg\, z_t$$

Wir bekommen

$$\nabla_{\vec{x}_t} S \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial x_t} \\ \frac{\partial S}{\partial y_t} \\ \frac{\partial S}{\partial z_t} \end{pmatrix} \;=\; m \begin{pmatrix} \frac{x_t - x_0}{t} \\ \frac{y_t - y_0}{t} \\ \frac{z_t - z_0}{t} \;-\; \frac{gt}{2} \end{pmatrix} \;=\; \frac{m}{t} \begin{pmatrix} x_t - x_0 \\ y_t - y_0 \\ z_t - z_0 \;-\; \frac{gt^2}{2} \end{pmatrix} \tag{30}$$

oder

$$\nabla_{\vec{x}_t} S \;=\; \tfrac{m}{t} \left\{ \vec{x}_t - \vec{x}_0 \;-\; \tfrac{gt^2}{2}\, \vec{e}_z \right\} \tag{31}$$

Wegen (6),

$$\begin{aligned} \vec{x}_t &= \vec{x}_0 \;+\; \vec{v}_0\, t \;-\; \tfrac{gt^2}{2}\, \vec{e}_z \\ \dot{\vec{x}}_t &= \vec{v}_0 \;-\; gt\, \vec{e}_z \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} \vec{x}_t - \vec{x}_0 \;-\; \tfrac{gt^2}{2}\, \vec{e}_z &= \vec{v}_0 t \;-\; gt^2\, \vec{e}_z \\ &= t\, [\, \vec{v}_0 \;-\; gt\, \vec{e}_z\,] \;=\; t\, \dot{\vec{x}}_t \end{aligned} \tag{32}$$

und damit

$$\nabla_{\vec{x}_t} S \;=\; \tfrac{m}{t} \left\{ \vec{x}_t - \vec{x}_0 \;-\; \tfrac{gt^2}{2}\, \vec{e}_z \right\} \;=\; m\, \dot{\vec{x}}_t \;=\; \vec{p}_t \tag{33}$$

Die Identität (28) ist also erfüllt. Die partielle Ableitung von S nach t ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial S}{\partial t}(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t) &= \tfrac{\partial}{\partial t}\, \tfrac{m}{2} \left\{ \tfrac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{t} \;-\; gt\, (z_t + z_0) \;-\; \tfrac{g^2 t^3}{12} \right\} \\ &= \tfrac{m}{2} \left\{ -\, \tfrac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{t^2} \;-\; g\, (z_t + z_0) \;-\; \tfrac{g^2 t^2}{4} \right\} \end{aligned} \tag{34}$$

Wir müssen zeigen, dass das gleich $-H$ ist. Insbesondere ist das also zeitlich konstant, was auf den ersten Blick natürlich nicht so aussieht. Wir haben

$$\begin{aligned} H(\vec{x}_t, \vec{p}_t) &= \tfrac{\vec{p}_t^{\,2}}{2m} \;+\; mgz_t \\ &\overset{(33)}{=} \tfrac{1}{2m}\, (\nabla_{\vec{x}_t} S)^2 \;+\; mgz_t \\ &\overset{(33)}{=} \tfrac{m}{2t^2} \left\{ \vec{x}_t - \vec{x}_0 \;-\; \tfrac{gt^2}{2}\, \vec{e}_z \right\}^2 \;+\; mgz_t \\ &= \tfrac{m}{2t^2} \left\{ (\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2 \;-\; gt^2 (z_t - z_0) \;+\; \tfrac{g^2 t^4}{4} \right\} \;+\; mgz_t \\ &= \tfrac{m}{2} \left\{ \tfrac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{t^2} \;-\; g(z_t - z_0) \;+\; \tfrac{g^2 t^2}{4} \right\} \;+\; mgz_t \\ &= \tfrac{m}{2} \left\{ \tfrac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{t^2} \;+\; g(z_t + z_0) \;+\; \tfrac{g^2 t^2}{4} \right\} \\ &\overset{(34)}{=} -\, \tfrac{\partial S}{\partial t}(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t) \end{aligned} \tag{35}$$

also tatsächlich

$$H\big(\, \vec{x}_t\, ,\, \nabla_{\vec{x}_t} S(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t) \big) \;+\; \tfrac{\partial S}{\partial t}(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t) \;=\; 0 \tag{36}$$

Bevor wir einen allgemeinen Beweis der Hamilton-Jacobi-Gleichung angeben, wollen wir noch die folgende Folgerung festhalten.

Folgerung: Die Lagrange Funktion $L = L(q, \dot{q})$ hänge nicht explizit von der Zeit ab. Dann ist das H eine Konstante der Bewegung und wir können schreiben

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q_0, q_t, t) \quad = \quad -H \quad = \quad -E \tag{37}$$

und damit

$$S(q_0, q_t, t) \quad = \quad -Et \; + \; W(q_0, q_t) \tag{38}$$

mit einer Funktion $W = W(q_0, q_t)$, die nicht explizit von der Zeit abhängt. Für das W muss dann gelten (wir setzen das S aus (38) in die Hamilton-Jacobi-Gleichung (29) ein)

$$H\big(\, q_t \,,\, \nabla_{q_t} W(q_0, q_t)\big) \quad = \quad E \;\; . \tag{39}$$

Beweis Theorem 3.3.1: Mit

$$S \quad = \quad \int_0^t L(q_s, \dot{q}_s)\, ds \quad =: \quad \tilde{S}(q_0, \dot{q}_0, t) \quad = \quad S(q_0, q_t, t) \tag{40}$$

bekommen wir

$$\frac{dS}{dt} \quad = \quad L(q_t, \dot{q}_t) \quad = \quad \frac{d}{dt}\, S(q_0, q_t, t) \quad = \quad \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial S}{\partial q_{j,t}}\, \dot{q}_{j,t} \; + \; \frac{\partial S}{\partial t} \tag{41}$$

Nehmen wir an, wir haben die Identität (28)

$$\nabla_{q_t} S \quad = \quad p_t$$

schon gezeigt. Dann folgt aus (41)

$$L(q_t, \dot{q}_t) \quad = \quad \sum_{j=1}^{f} p_{j,t}\, \dot{q}_{j,t} \; + \; \frac{\partial S}{\partial t} \tag{42}$$

oder

$$\frac{\partial S}{\partial t} \quad = \quad L(q_t, \dot{q}_t) \; - \; \sum_{j=1}^{f} p_{j,t}\, \dot{q}_j \quad = \quad -H \tag{43}$$

und das ist genau die Hamilton-Jacobi-Gleichung, also müssen wir nur noch die Identität (28) zeigen: Nach Definition der partiellen Ableitung ist (mit $e_j = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ der j-te Standardbasisvektor)

$$\frac{\partial S}{\partial q_{j,t}}(q_0, q_t, t) \quad = \quad \lim_{\Delta q \to 0} \frac{S(\, q_0 \,,\, q_t + \Delta q\, e_j \,,\, t\,) \; - \; S(q_0, q_t, t)}{\Delta q}$$

Wir brauchen etwas Notation: Es sei

$$\{\, q_s \,\}_{0\le s\le t} \quad =: \quad \{\, q_s^{(t,q_t)} \,\}_{0\le s\le t}$$

der extremale Pfad, der zur Berechnung von $S(q_0, q_t, t)$ verwendet werden muss. Für diesen Pfad gilt also

$$\begin{aligned} q_{s=0}^{(t,q_t)} &= q_0 \\ q_{s=t}^{(t,q_t)} &= q_t \end{aligned}$$

und

$$\tfrac{d}{ds}\,\frac{\partial L}{\partial \dot q_{i,s}} \;-\; \frac{\partial L}{\partial q_{i,s}} \;=\; 0$$

für alle $s \in [0,t]$. Zur Berechnung von $S(q_0, q_t + \Delta q\, e_j, t)$ brauchen wir einen neuen Pfad

$$\{\, q_s^{(t,q_t+\Delta q)} \,\}_{0\le s\le t}$$

der soll ja in derselben Zeit bei gleichem Startpunkt einen anderen Zielpunkt erreichen, nämlich

$$\begin{aligned} q_{s=0}^{(t,q_t+\Delta q)} &= q_0 \\ q_{s=t}^{(t,q_t+\Delta q)} &= q_t + \Delta q\, e_j \end{aligned}$$

Das geht nur dadurch, dass wir andere Anfangsgeschwindigkeiten wählen. Der neue Pfad muss dann ebenfalls eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung sein. Wir haben dann

$$\begin{aligned} \Delta_j S \;&:=\; S(\, q_0 \,,\, q_t + \Delta q\, e_j \,,\, t\,) \;-\; S(q_0, q_t, t) \\ &=\; \textstyle\int_{t_0}^{t} L\big(\, q_s^{(t,q_t+\Delta q)} \,,\, \dot q_s^{(t,q_t+\Delta q)} \big)\, ds \;-\; \int_{t_0}^{t} L\big(\, q_s^{(t,q_t)} \,,\, \dot q_s^{(t,q_t)} \big)\, ds \\ &=\; \textstyle\int_{t_0}^{t} \Big[\, L\big(\, q_s^{(t,q_t+\Delta q)} \,,\, \dot q_s^{(t,q_t+\Delta q)} \big) \;-\; L\big(\, q_s^{(t,q_t)} \,,\, \dot q_s^{(t,q_t)} \big) \Big]\, ds \end{aligned}$$

Wir definieren den Pfad

$$\eta_s^{\Delta q} \;:=\; q_s^{(t,q_t+\Delta q)} \;-\; q_s^{(t,q_t)}$$

mit

$$\begin{aligned} \eta_{s=0}^{\Delta q} \;&=\; q_0^{(t,q_t+\Delta q)} \;-\; q_0^{(t,q_t)} \;=\; q_0 - q_0 \;=\; 0 \\ \eta_{s=t}^{\Delta q} \;&=\; q_t^{(t,q_t+\Delta q)} \;-\; q_t^{(t,q_t)} \;=\; q_t + \Delta q\, e_j \;-\; q_t \;=\; \Delta q\, e_j \end{aligned}$$

Dann können wir schreiben

$$\begin{aligned} &L\big(\, q_s^{(t,q_t+\Delta q)} \,,\, \dot q_s^{(t,q_t+\Delta q)} \big) \;-\; L\big(\, q_s^{(t,q_t)} \,,\, \dot q_s^{(t,q_t)} \big) \\ &\quad=\; \sum_{i=1}^{f} \Big\{\, \tfrac{\partial L}{\partial q_{i,s}}(q_s, \dot q_s)\, \eta_{i,s}^{\Delta q} \;+\; \tfrac{\partial L}{\partial \dot q_{i,s}}(q_s, \dot q_s)\, \dot\eta_{i,s}^{\Delta q} \Big\} \;+\; O\big[(\Delta q)^2\big] \end{aligned}$$

und damit, bis auf Terme von der Grössenordnung $O\big[(\Delta q)^2\big]$,

$$\begin{aligned}
\Delta_j S \;&=\; \sum_{i=1}^{f} \int_{t_0}^{t} \Big\{ \tfrac{\partial L}{\partial q_{i,s}}(q_s,\dot q_s)\,\eta_{i,s}^{\Delta q} \;+\; \tfrac{\partial L}{\partial \dot q_{i,s}}(q_s,\dot q_s)\,\dot\eta_{i,s}^{\Delta q} \Big\}\,ds \\
&=\; \sum_{i=1}^{f} \int_{t_0}^{t} \Big\{ \tfrac{\partial L}{\partial q_{i,s}}(q_s,\dot q_s)\,\eta_{i,s}^{\Delta q} \;-\; \tfrac{d}{ds}\tfrac{\partial L}{\partial \dot q_{i,s}}(q_s,\dot q_s)\,\eta_{i,s}^{\Delta q} \Big\}\,ds \;+\; \sum_{i=1}^{f} \tfrac{\partial L}{\partial \dot q_{i,s}}(q_s,\dot q_s)\,\eta_{i,s}^{\Delta q}\Big|_{s=0}^{s=t} \\
&=\; \sum_{i=1}^{f} \int_{t_0}^{t} \Big\{ \tfrac{\partial L}{\partial q_s}(q_s,\dot q_s) \;-\; \tfrac{d}{ds}\tfrac{\partial L}{\partial \dot q_s}(q_s,\dot q_s) \Big\}\,\eta_s^{\Delta q}\,ds \;+\; \sum_{i=1}^{f} \tfrac{\partial L}{\partial \dot q_{i,t}}(q_t,\dot q_t)\,\eta_{i,t}^{\Delta q} \\
&=\; 0 \;+\; \tfrac{\partial L}{\partial \dot q_{j,t}}(q_t,\dot q_t)\,\Delta q \\
&=\; 0 \;+\; p_{j,t}\,\Delta q
\end{aligned}$$

Also,

$$\frac{\partial S}{\partial q_{j,t}} \;=\; \lim_{\Delta q\to 0}\frac{\Delta_j S}{\Delta q} \;=\; \lim_{\Delta q\to 0}\frac{p_{j,t}\,\Delta q \;+\; O\big[(\Delta q)^2\big]}{\Delta q} \;=\; p_{j,t}$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung ist eher von theoretischem Interesse, mit ihr lässt sich vielleicht am einfachsten der Übergang von der Quantenmechanik zur klassischen Mechanik verstehen, das können wir uns dann nächste Woche noch etwas genauer anschauen. Zum Lösen von konkreten Problemen ist die Hamilton-Jacobi-Gleichung eher weniger geeignet.