Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2023/24

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Wir betrachten ein optisches Medium in der (x, y)-Ebene, zum Beispiel Vakuum für $y < 0$ und eine Glasplatte für $y \geq 0$. Der Brechungsindex eines optischen Mediums ist definiert durch

$$n(x, y) \;=\; \frac{c_0}{c(x, y)}$$

wobei c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist und $c(x, y)$ die Lichtgeschwindigkeit in dem optischen Medium an der Stelle (x, y). Es seien $P_0 = (x_0, y_0)$ und $P_1 = (x_1, y_1)$ zwei fest gewählte Punkte. Das Fermatsche Prinzip sagt dann, dass Licht, welches von P_0 nach P_1 geht, genau den Weg nimmt, für den die Durchlaufzeit am kleinsten ist.

a) Es sei etwa $x_1 > x_0$ und der vom Lichtstrahl durchlaufene Weg sei durch die Funktion $y = y(x)$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Durchlaufzeit durch das Integral

$$T(y) \;=\; \frac{1}{c_0} \int_{x_0}^{x_1} n(x, y) \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

gegeben ist.

b) Wir nehmen an, dass der Brechungsindex nur von y abhängt, $n = n(y)$. Zeigen Sie, dass sich in diesem Fall die Euler-Lagrange-Gleichung auf

$$y'' \;=\; \frac{n'(y)}{n(y)}\,(1 + y'^2)$$

reduzieren lässt.

c) Geben Sie die Hamilton-Funktion $H(y, y') = y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L$ an. Nach dem Theorem 2.5.2 aus dem week8.pdf ist diese Funktion konstant, unabhängig von x.

d) Betrachten wir jetzt etwa einen linear ansteigenden Brechungsindex von der Form

$$n(y) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } \; y < 0 \\ 1 + y & \text{für } \; y \geq 0 \end{cases}$$

Ein Lichtstrahl werde unter einem Winkel von 30° (gemessen gegen die negative x-Achse) auf den Punkt $P_0 = (0, 0)$ gestrahlt, in Richtung der oberen Halbebene. Berechnen Sie, analytisch oder numerisch, den weiteren Verlauf des Lichtstrahls.

e) Wir betrachten dieselbe Situation wie in (d), allerdings soll der Einstrahlwinkel so gewählt werden, dass der Lichtstrahl von $P_0 = (0, 0)$ nach $P_1 = (1, 1)$ geht. Berechnen Sie, analytisch oder numerisch, die Bahnkurve des Lichtstrahls.