

8. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamik der Teilchen und Felder

1. Aufgabe: Eine Perle der Masse m bewege sich unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F} = (0, -mg)$ reibungsfrei auf einem Draht in der (x, z) -Ebene. Der Draht werde durch eine Funktion $z = f(x)$ beschrieben und verbinde die Punkte $P_1 = (0, h)$ und $P_2 = (\ell, 0)$. Wir haben also ein Problem mit einem Freiheitsgrad und wir wählen x als die verallgemeinerte Koordinate.

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L = L(x, \dot{x})$ an.

b) Zeigen Sie, dass sich die Bewegungsgleichung¹ auf die folgende Form bringen lässt:

$$\{1 + f'(x)^2\}\ddot{x} + f'(x)f''(x)\dot{x}^2 + g f'(x) = 0. \quad (1)$$

c) Nach dem Theorem 2.5.2 aus der Vorlesung ist die Funktion

$$H(x, \dot{x}) := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L(x, \dot{x}) \quad (2)$$

eine Konstante der Bewegung, es gilt $\frac{d}{dt}H(x_t, \dot{x}_t) = 0$. Zeigen Sie: Für alle Zeiten $t \geq 0$ gilt

$$H(x_t, \dot{x}_t) = \frac{m}{2} \{1 + f'(x_t)^2\} \dot{x}_t^2 + mgf(x_t) = mgh \quad (3)$$

wenn wir die Perle mit Geschwindigkeit 0 bei $P_1 = (x_0, z_0) = (0, h)$ starten lassen. Zeigen Sie weiterhin: Aus Gleichung (3) folgt

$$\dot{x} = \sqrt{2g} \sqrt{\frac{h - f(x)}{1 + f'(x)^2}}. \quad (4)$$

d) Wir substituieren jetzt $f(x) \rightarrow q(x)$ durch

$$q(x) := h - f(x), \quad q'(x) = -f'(x).$$

Zeigen Sie mit Hilfe von (4): Die Zeit T , die benötigt wird, um zum Endpunkt $P_2 = (0, \ell)$ zu gelangen, ist gegeben durch

$$T = T(q) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\ell \sqrt{\frac{1 + q'(x)^2}{q(x)}} dx \quad (5)$$

Das Brachistochronen-Problem besteht nun darin, dasjenige $q = q(x)$ zu finden, also die genaue Form des Drahtes so zu bestimmen, so dass die Durchlaufzeit $T = T(q)$ aus Gleichung (5) minimiert wird. Das schauen wir uns dann nächste Woche in der Vorlesung an.

..bitte wenden

¹die werden wir dann aber gar nicht weiter benutzen, sondern wir benutzen die Gleichung (4) weiter unten

2.Aufgabe: Überprüfen Sie die Formel (5) aus Aufgabe 1 für den Fall einer schiefen Ebene. Berechnen Sie dazu die Zeit T elementar mit Hilfe von Kraft ist Masse mal Beschleunigung und zeigen Sie dann, dass der Ausdruck (5) dasselbe Resultat liefert.