Hochschule RheinMain — WS 2023/24
Prof. Dr. D. Lehmann

7. Übungsblatt zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine beliebige reelle oder komplexe $n\times n$ Matrix, die nicht von der Zeit t abhängt. Beweisen Sie: Das DGL-System erster Ordnung

$$\dot{x}_t \;=\; A\,x_t$$

mit $x_t = (x_{1,t},\cdots,x_{n,t})$, als Spaltenvektor, wird gelöst von

$$x_t \;=\; e^{tA}\,x_0$$

Zeigen Sie dazu, dass die Gleichung

$$\tfrac{d}{dt}\,e^{tA} \;=\; A\,e^{tA}$$

nicht nur für skalares A, sondern auch für Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gültig ist. Schreiben Sie dazu die Potenzreihenentwicklung von e^{tA} hin und tun Sie diese dann gliedweise differenzieren.

2.Aufgabe: Das linearisierte Doppelpendel ist gegeben durch das DGL-System

$$T\begin{pmatrix}\ddot{\varphi}_{1,t}\\ \ddot{\varphi}_{2,t}\end{pmatrix} \;+\; V\begin{pmatrix}\varphi_{1,t}\\ \varphi_{2,t}\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{1}$$

mit den Matrizen

$$T \;=\; \begin{pmatrix}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\ell_1 & \ell_2\\ \ell_1 & \ell_2\end{pmatrix}, \qquad V \;=\; \begin{pmatrix}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix} \tag{2}$$

a) Betrachten Sie den Grenzfall $m_1 \to 0$ und geben Sie die allgemeine Lösung von (1) an.

b) Wir wollen jetzt den Fall gleicher Massen und gleicher Pendellängen betrachten, also

$$m_1 \;=\; m_2 \;=:\; m \tag{3}$$
$$\ell_1 \;=\; \ell_2 \;=:\; \ell \tag{4}$$

Geben Sie für diesen Fall die allgemeine Lösung von (1) an. Schauen Sie sich dazu noch einmal die Herleitung der allgemeinen Lösung auf den letzten Seiten vom `week7.pdf` an und berechnen Sie insbesondere konkret die Matrix B der Eigenvektoren.

c) Wählen Sie jetzt noch konkreter

$$m_1 = m_2 = m = 1\,\mathrm{kg} \tag{5}$$
$$\ell_1 = \ell_2 = \ell = 1\,\mathrm{m} \tag{6}$$

und betrachten Sie die folgenden Anfangsbedingungen: Die Anfangsgeschwindigkeiten seien null,

$$\dot{\varphi}_{1,0} = \dot{\varphi}_{2,0} = 0 \tag{7}$$

und die erste Masse, die obere Masse, lenken wir etwa um $5° = \pi/36 \approx 0.0873 \ll 1$ aus, bei einer Pendellänge von $\ell = 1\,\mathrm{m}$ sind das dann 8.73 cm. Die zweite Masse, die untere Masse, werde nicht ausgelenkt, also

$$\varphi_{1,0} = \pi/36 \tag{8}$$
$$\varphi_{2,0} = 0 \tag{9}$$

Plotten Sie $\varphi_{1,t}$ und $\varphi_{2,t}$ in einem Diagramm für Zeiten $t \in [0, T]$, wobei der Zeithorizont T so gewählt werden sollte, dass man im wesentlichen sieht, was so passiert. Wählen Sie dazu eine Software, mit der Sie sich vertraut fühlen, etwa Excel, Matlab oder R.