

6. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamik der Teilchen und Felder

1. Aufgabe: Die folgende Aussage werden wir in dem `week7.pdf` nächste Woche zur Lösung des linearisierten Doppelpendels benutzen: Es sei A eine beliebige reelle oder komplexe $n \times n$ Matrix und Ω sei eine $n \times n$ Matrix mit

$$\Omega^2 = A$$

Weiter bezeichne Id die $n \times n$ Einheitsmatrix. Dann gilt¹

$$\exp \left\{ t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) \Omega^{-1} \\ -\sin(\Omega t) \Omega & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

wobei die $n \times n$ Matrizen $\cos(\Omega t)$ und $\sin(\Omega t)$ über die Potenzreihenentwicklungen der Sinus- und Cosinus-Funktion definiert sind. Gehen Sie zum Beweis etwa folgendermassen vor:

- a) Erinnern Sie sich an die Potenzreihenentwicklungen der Funktionen e^x , $\cos x$ und $\sin x$.
- b) Berechnen Sie die Potenzen (die 0 steht hier für eine $n \times n$ Matrix mit lauter Nullen)

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^j$$

Unterscheiden Sie dazu die Fälle $j = 2k$ und $j = 2k + 1$.

- c) Schreiben Sie die Potenzreihenentwicklung von

$$\exp \left\{ t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

hin und zerlegen Sie die Summe in zwei Teilsommen, eine Teilsomme mit den geraden Potenzen und die andere Teilsomme mit den ungeraden Potenzen.

2. Aufgabe: Beweisen Sie die folgende Identität für 2×2 Matrizen: Es gilt

$$\begin{aligned} \exp \left\{ t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & -2\mu \end{pmatrix} \right\} &= e^{-\mu t} \begin{pmatrix} \cos \omega t + \frac{\mu}{\omega} \sin \omega t & \frac{\sin \omega t}{\omega} \\ -\varepsilon^2 \frac{\sin \omega t}{\omega} & \cos \omega t - \frac{\mu}{\omega} \sin \omega t \end{pmatrix} \\ &= e^{-\mu t} \left[\cos \omega t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin \omega t}{\omega} \begin{pmatrix} +\mu & +1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

mit $\omega := \sqrt{\varepsilon^2 - \mu^2}$. Für $\mu = 0$ ist (2) offensichtlich ein Spezialfall von (1).

¹es sei also vorausgesetzt, dass Ω^{-1} existiert