Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2023/24

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Wir parametrisieren die Bewegung eines Teilchens der Masse m im $\mathbb{R}^3$ durch Kugelkoordinaten,

$$\vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; r \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\sin\theta \\ \sin\varphi\,\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

mit $r \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\theta \in [0, \pi]$. Wir führen folgende Basisvektoren ein:

$$\vec{e}_r \;:=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\sin\theta \\ \sin\varphi\,\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi \;:=\; \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta \;:=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\theta \\ \sin\varphi\,\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

Der Bahndrehimpuls ist definiert durch den Vektor[1]

$$\vec{L} \;:=\; \vec{x} \times \vec{p} \;=\; m\,\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$$

Zeigen Sie:

a) Für eine kräftefreie Bewegung $m\ddot{\vec{x}} = 0$ wie wir sie in Beispiel 1 von `week4.pdf` betrachtet haben, gilt

$$\tfrac{d}{dt}\,\vec{L} \;=\; \vec{0}\,,$$

das heisst, $\vec{L}$ ist eine Erhaltungsgrösse.

b) Für eine Bewegung unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ und einer Zwangskraft der Form $\vec{Z} = \lambda\,\vec{e}_r$ gilt nicht mehr $\tfrac{d}{dt}\,\vec{L} = \vec{0}$, aber es gilt noch

$$\tfrac{d}{dt}\,L_3 \;=\; 0$$

wobei L_3 die z-Komponente des Drehimpulses $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ ist.

c) In Kugelkoordinaten gilt

$$\vec{L} \;=\; m\,r^2 \left\{ \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi \;-\; \dot{\varphi}\,\sin\theta\,\vec{e}_\theta \right\}$$

und

$$L_3 \;=\; m\,r^2\,\dot{\varphi}\,\sin^2\theta\,.$$

[1] das $\vec{L}$ für den Bahndrehimpuls bitte nicht verwechseln mit dem L für die Lagrange-Funktion

2.Aufgabe: Wir betrachten die Bewegung eines Kügelchens der Masse m unter dem Einfluss der Schwerkraft in einer halbkugelförmigen Schüssel, schauen Sie sich dazu das Beispiel 2 von `week4.pdf` an. Dort hatten wir die Bewegung durch Kugelkoordinaten parametrisiert,

$$\vec{x}_t \;=\; \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} \;=\; R \begin{pmatrix} \cos\varphi_t \, \sin\theta_t \\ \sin\varphi_t \, \sin\theta_t \\ \cos\theta_t \end{pmatrix}$$

wobei R jetzt der konstante Radius der Schüssel ist, und wir hatten mit Hilfe des Lagrange-Formalismus die folgenden Bewegungsgleichungen hergeleitet:

$$\tfrac{d}{dt}\big\{\, \dot\varphi \sin^2\theta \,\big\} \;=\; 0 \tag{1}$$

$$\ddot\theta \;-\; \dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta \;-\; \tfrac{g}{R}\sin\theta \;=\; 0 \tag{2}$$

a) Wie müssen die Anfangsbedingungen gewählt werden, wenn sich das Kügelchen auf horizontalen Kreisen bewegen soll? Versuchen Sie, alle solche möglichen Anfangsbedingungen zu charakterisieren.

b) Für $\dot\varphi = 0$ können wir die Bewegung auch als die eines ebenen Fadenpendels mit der Pendellänge R auffassen. Die Ruheposition des Pendels bedindet sich bei $\vec{x} = (0, 0, -R)$ oder $\theta = \pi$. Substituieren Sie $\theta = \pi - \alpha$ und betrachten Sie den Fall kleiner Auslenkungen α, so dass die Näherung $\sin\alpha \approx \alpha$ gerechtfertigt ist. Geben Sie für diesen Fall die Bewegungsgleichung für α an sowie die allgemeine Lösung.