Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2023/24

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens in der (x, y)-Ebene und parametrisieren die Bewegung durch Polarkoordinaten,

$$\vec{x}(t) \;=\; \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \;=\; r_t \begin{pmatrix} \cos\varphi_t \\ \sin\varphi_t \end{pmatrix}$$

Weiterhin definieren wir die Vektoren

$$\vec{e}_r \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi_t \\ \sin\varphi_t \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi \;=\; \begin{pmatrix} -\sin\varphi_t \\ \cos\varphi_t \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

a) Die Vektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ bilden eine Orthonormalbasis.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r &= \dot{\varphi}_t\, \vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi}_t\, \vec{e}_r \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\dot{\vec{x}} \;=\; \dot{r}\,\vec{e}_r \;+\; r\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

d) Die kinetische Energie ist gegeben durch

$$T \;=\; \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^2 \;=\; \tfrac{m}{2}\left\{ \dot{r}^2 \;+\; r^2\,\dot{\varphi}^2 \right\}$$

e) Es gilt

$$\ddot{\vec{x}} \;=\; \left(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r \;+\; \left(2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi \;.$$

2.Aufgabe: Wir betrachten die Bewegung eines kräftefreien Teilchens in der (x, y)-Ebene und parametrisieren die Bewegung durch Polarkoordinaten. Wir betrachten also dasselbe Setting wie in Aufgabe 1. Wenn keine äusseren Kräfte auf das Teilchen wirken, ist die Bewegungsgleichung einfach gegeben durch

$$m\,\ddot{\vec{x}} \;=\; 0 \tag{1}$$

Nach Aufgabe (1e) ist Gleichung (1) äquivalent zum System

$$\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 \;=\; 0 \tag{2}$$

$$2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi} \;=\; 0 \tag{3}$$

Schauen Sie sich jetzt noch einmal das Material aus dem `week3.pdf` von der Vorlesungshomepage an, insbesondere den Teil (b) des Theorems 2.1.2 auf der letzten Seite.

a) Wählen Sie $(u, v) = (r, \phi)$ als die verallgemeinerten Koordinaten und geben Sie die Lagrange-Funktion L an (haben Sie in Aufgabe 1 schon berechnet..) .

b) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen her und zeigen Sie, dass sie äquivalent sind zum System (2) und (3).