Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2023/24

2. Übungsblatt zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Wir betrachten die Differentialgleichung (DGL) für einen gedämpften harmonischen Oszillator mit einer zeitabhängigen Dämpfung,

$$\ddot{x}_t \; + \; \gamma_t \, \dot{x}_t \; + \; \omega^2 x_t \;\; = \;\; 0 \tag{1}$$

Im Vergleich zur Situation auf dem ersten Übungsblatt darf das γ_t jetzt also von der Zeit t abhängen. Zeigen Sie, dass sich mit Hilfe des Ansatzes

$$x_t \;\; = \;\; e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma_s \, ds} \, y_t$$

die DGL (1) auf die DGL

$$\ddot{y}_t \; + \; \omega_t^2 \, y_t \;\; = \;\; 0 \tag{2}$$

reduzieren lässt mit einer zeitabhängigen Frequenz ω_t gegeben durch

$$\omega_t^2 \;\; = \;\; \omega^2 - \tfrac{\gamma_t^2}{4} - \tfrac{\dot{\gamma}_t}{2} \;\; . \tag{3}$$

2.Aufgabe: Betrachten Sie jetzt konkret die DGL

$$\ddot{x}_t \; + \; 2\mu \sin(\mu t) \, \dot{x}_t \; + \; x_t \;\; = \;\; 0 \tag{4}$$

etwa mit

$$\mu \;\; = \;\; \tfrac{1}{50}$$

a) Geben Sie den Dämpfungsfaktor $e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma_s \, ds}$ explizit an.

b) Geben Sie die zeitabhängige Frequenz $\omega_t^2 = \omega^2 - \frac{\gamma_t^2}{4} - \frac{\dot{\gamma}_t}{2}$ explizit an.

c) Überlegen Sie sich, dass $\omega_t^2 \approx 1$ eine vernünftige Approximation ist, und geben Sie unter dieser Annahme eine approximative Lösung von (4) in analytisch geschlossener Form an. Wählen Sie dazu die Anfangsbedingungen $x_0 = 1$ und $\dot{x}_0 = 0$.

d) Plotten Sie die Lösung aus c) auf dem Intervall $[0, 200\pi] \approx [0, 628]$.

e) Wenn Sie noch Zeit und Lust haben, könnten Sie versuchen, mit einer numerischen Simulation die Güte der Approximation aus c) zu überprüfen. Man bekommt etwa das folgende Bild (farbige Version online):