Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2023/24

13. Übungsblatt zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Wir betrachten ein punktförmiges Teilchen mit Masse m, welches sich unter dem Einfluss eines Potentials $V = V(x)$ im $\mathbb{R}^3$ bewegt, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Quantenmechanisch wird das Teilchen durch eine komplexwertige, quadratintegrable Wellenfunktion $\psi = \psi_t(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ beschrieben, welche eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung sein muss,

$$i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi_t(x) \;=\; \Big\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta \;+\; V(x) \Big\}\,\psi_t(x) \tag{1}$$

Wir machen den Ansatz

$$\psi_t(x) \;=\; |\psi_t(x)| \;\cdot\; e^{\,i\arg[\psi_t(x)]} \;=:\; a(x,t)\;\cdot\; e^{\,\frac{i}{\hbar}\,\varphi(x,t)} \tag{2}$$

mit einer positiven, reellen Amplitude

$$a(x,t) \;:=\; |\psi_t(x)| \tag{3}$$

und einem reellen, differenzierbaren (d.h. nicht notwendig in $[0, 2\pi\hbar)$ liegenden) Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$.

a) Beweisen Sie die folgende Rechenregel: Für beliebige Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ gilt

$$\Delta(f\cdot g) \;=\; \Delta f\cdot g \;+\; 2\,\nabla f\cdot\nabla g \;+\; f\cdot\Delta g \tag{4}$$

b) Zeigen Sie, dass die komplexe Schrödinger-Gleichung (1) äquivalent ist zu den folgenden beiden rellen Gleichungen für a und φ:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t} \;=\; \frac{1}{2m}\,|\nabla\varphi|^2 \;+\; V \;-\; \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\Delta a}{a} \tag{5}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} \;=\; -\,\frac{1}{m}\,\nabla a\cdot\nabla\varphi \;-\; \frac{1}{2m}\,a\cdot\Delta\varphi \tag{6}$$

c) Zeigen Sie, dass die Gleichung (6) äquivalent ist zur Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} \;+\; \mathrm{div}\Big(\rho\cdot\frac{\nabla\varphi}{m}\Big) \;=\; 0 \tag{7}$$

für die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(x,t) \;:=\; a^2(x,t) \;=\; |\psi_t(x)|^2 \tag{8}$$

d) Im Limes $\hbar \to 0$ reduziert sich die Gleichung (5) auf

$$H(\,x\,,\,\nabla\varphi\,) \;+\; \frac{\partial\varphi}{\partial t} \;\;=\;\; 0 \tag{9}$$

mit der klassischen Hamilton-Funktion

$$H(x,p) \;\;=\;\; \frac{p^2}{2m} \;+\; V(x) \tag{10}$$

Wodurch sind nun Lösungen der Gleichung (9) gegeben? Erinnern Sie sich dazu an die Hamilton-Jacobi Gleichung aus dem week12.

e) Zeigen Sie, dass für die Lösungen $\varphi = \varphi(x,t)$ von (9) aus dem Teil (d) die Grösse $\nabla\varphi/m$ die Bedeutung einer klassischen Geschwindigkeit $v = p/m$ hat, die Kontinuitätsgleichung (7) liest sich dann also folgendermassen:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} \;+\; \mathrm{div}\big(\,\rho\cdot v\,\big) \;\;=\;\; 0 \quad .$$