Hochschule RheinMain WS 2023/24
Prof. Dr. D. Lehmann

11. Übungsblatt zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Simulieren Sie die Bahnkurven (x_t, p_t) für einen eindimensionalen anharmonischen Oszillator mit Hamilton-Funktion

$$H(x,p) \;=\; \tfrac{p^2}{2} \,+\, \tfrac{\lambda}{\alpha}\,|x|^\alpha$$

indem Sie die diskretisierten Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} x_{t+dt} &= x_t \,+\, p_t\, dt \\ p_{t+dt} &= p_t \,-\, \lambda\,\mathrm{sign}(x_t)\,|x_t|^{\alpha-1}\, dt \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Software Ihrer Wahl numerisch iterieren. Betrachten Sie die Anfangsbedingungen $(x_{t=0}, p_{t=0}) = (x_0, 0)$ mit $x_0 \in \{\ 0.5\ ,\ 1\ ,\ 2\ \}$ und wählen Sie $\lambda = 1$ und $\alpha \in \{1, 2, 4\}$, Sie sollten dann also in der Lage sein, die Bilder aus dem `week11.pdf` zu reproduzieren.

2.Aufgabe: Es sei $H = H(x,p)$ eine beliebige Hamilton-Funktion mit $(x,p) \in \mathbb{R}^2$ und die Bahnkurven (x_t, p_t) seien eine Lösung der Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{x} \;=\; \tfrac{\partial H}{\partial p}\,, \qquad \dot{p} \;=\; -\,\tfrac{\partial H}{\partial x}\,.$$

Wir machen die Transformation $(x,p) \to (\varepsilon, \varphi)$ mit

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2\varepsilon}\,\cos\varphi \\ p &= \sqrt{2\varepsilon}\,\sin\varphi \end{aligned}$$

oder in komplexer Schreibweise[1]

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,x \,+\, ip\,\big) \;=\; \sqrt{\varepsilon}\,e^{i\varphi}$$

und definieren die transformierte Hamilton-Funktion

$$\tilde{H}(\varepsilon,\varphi) \;:=\; H\big(\,\sqrt{2\varepsilon}\,\cos\varphi\,,\sqrt{2\varepsilon}\,\sin\varphi\,\big)$$

Zeigen Sie: Die transformierten Bahnkurven $(\varepsilon_t, \varphi_t)$ erfüllen die Gleichungen

$$\dot{\varepsilon} \;=\; \tfrac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi}\,, \qquad \dot{\varphi} \;=\; -\,\tfrac{\partial \tilde{H}}{\partial \varepsilon}\,.$$

Das heisst, die Struktur der Hamiltonschen Gleichungen hat sich unter dieser Transformation nicht geändert. Jede Transformation, die die Hamiltonschen Gleichungen invariant lässt, wird auch als kanonische Transformation bezeichnet.

[1]so sieht man das gelegentlich in einem quantenmechanischen Kontext