

10. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamik der Teilchen und Felder

1. Aufgabe: Wir betrachten die kräftefreie Bewegung eines Teilchens im \mathbb{R}^3 in Kugelkoordinaten,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

mit $r \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\theta \in [0, \pi]$. In der Vorlesung hatten wir in dem `week4.pdf` in Gleichung (9) den folgenden Ausdruck für die Lagrange-Funktion $L = T - V = T - 0 = T$ hergeleitet:

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 = \frac{m}{2} \left\{ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \right\}$$

Wir wählen also

$$(q, \dot{q}) = (r, \varphi, \theta, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{\theta})$$

als die verallgemeinerten Koordinaten.

- Berechnen Sie die verallgemeinerten Impulse $(p_r, p_\varphi, p_\theta)$.
- Berechnen Sie die Hamilton-Funktion $H = H(r, \varphi, \theta, p_r, p_\varphi, p_\theta)$.
- Stellen Sie die Hamiltonschen Gleichungen auf.
- Zeigen Sie, dass die Hamiltonschen Gleichungen aus Teil (c) äquivalent sind zum System (11) aus dem `week4.pdf`, das waren die Gleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - r\dot{\theta}^2 &= 0 \\ \frac{d}{dt} \{ r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta \} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \{ r^2 \dot{\theta} \} - r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta &= 0. \end{aligned}$$

2. Aufgabe: Beweisen Sie das Theorem 3.1.3 aus der Vorlesung, aus dem `week10.pdf`, das war die folgende Aussage: Es sei $L = T - V$ die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems und die kinetische Energie T und die potentielle Energie V seien von der Form¹

$$T = T(q, \dot{q}) = \sum_{j,k=1}^f \dot{q}_j \dot{q}_k t_{jk}(q)$$

mit $t_{jk}(q) = t_{kj}(q)$ und die potentielle Energie hänge nur von den q 's ab, aber nicht von den \dot{q} . Also

$$V = V(q) = V(q_1, \dots, q_f)$$

Dann gilt: Die Hamilton-Funktion H ist gegeben durch die Gesamtenergie, es ist

$$H = T + V.$$

¹auf diese Form waren wir in dem `week5.pdf` in Gleichung (20) gekommen