Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2023/24

1. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe (Erinnerung harmonischer Oszillator): Der harmonische Oszillator ist eines der wenigen Systeme, die sich explizit lösen lassen. Weiterhin lassen sich viele schwingungsfähige Systeme für kleine Auslenkungen approximativ durch einen harmonischen Oszillator beschreiben. Das liegt einfach daran, dass wenn ein Potenzial $V = V(x)$ an einer Stelle $x_{\min} \in \mathbb{R}$, betrachten wir eine eindimensionale Situation, ein lokales Minimum hat, so dass das $x_{\min}$ also für hinreichend kleine Auslenkungen eine stabile Gleichgewichtslage ist, dann ist die Taylor-Entwicklung 2. Ordnung um diese Gleichgewichtslage herum gegeben durch

$$\begin{aligned} V(x) &= V(x_{\min}) + \underbrace{V'(x_{\min})}_{=0}(x - x_{\min}) + \tfrac{1}{2}V''(x_{\min})(x - x_{\min})^2 + O\big((x - x_{\min})^3\big) \\ &\approx V(x_{\min}) + \tfrac{1}{2}V''(x_{\min})(x - x_{\min})^2 \end{aligned}$$

und das ist das Potenzial eines harmonischen Oszillators.

a) Die Differentialgleichung für einen freien harmonischen Oszillator ist gegeben durch[1]

$$\ddot{x}_t + \omega^2 x_t = 0$$

Geben Sie die allgemeine reelle Lösung dieser DGL zu den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ an.

b) Die Differentialgleichung für einen gedämpften harmonischen Oszillator ist gegeben durch

$$\ddot{x}_t + \gamma\,\dot{x}_t + \omega^2 x_t = 0$$

mit einem $\gamma > 0$. Geben Sie die allgemeine reelle Lösung dieser DGL zu den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ an. Setzen Sie dazu $\gamma = 2\mu$ und unterscheiden Sie die Fälle $\mu < \omega$, $\mu = \omega$ und $\mu > \omega$.

c) Die Differentialgleichung für eine erzwungene gedämpfte harmonische Schwingung mit Anregungsfrequenz ω_0 ist gegeben durch

$$\ddot{x}_t + \gamma\,\dot{x}_t + \omega^2 x_t = a_0 \sin(\omega_0 t)$$

Dabei wollen wir annehmen, dass zur Zeit $t = 0$ die anregende Kraft 0 ist, so dass wir auf der rechten Seite der DGL nur einen Sinus-Term haben und keinen Cosinus-Term. Geben Sie die allgemeine reelle Lösung dieser DGL zu den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ an.

---

[1] das x_t in den DGLs hat die Bedeutung von $x_t - x_{\min}$