Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann



**Lösungen zum 9. Übungsblatt**
**Dynamik der Teilchen und Felder**

**1.Aufgabe:** **a)** In der $(x, y)$-Ebene ist ein Wegelement $d\ell$ gegeben durch

$$d\ell^2 \;=\; dx^2 \;+\; dy^2$$

oder

$$d\ell \;=\; \sqrt{dx^2 + dy^2} \;=\; \sqrt{1 + \left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2}\; dx \;=\; \sqrt{1 + (y')^2}\; dx$$

Beträgt die Geschwindigkeit an der Stelle $(x, y)$

$$c(x, y) \;=\; \frac{c_0}{n(x, y)}$$

dann ist die Zeit $dt$, die zum Durchlaufen des Wegelementes $d\ell$ notwendig ist, gegeben durch

$$dt \;=\; \frac{d\ell}{c(x, y)} \;=\; \frac{n(x, y)}{c_0}\; \sqrt{1 + (y')^2}\; dx$$

Die Gesamtzeit ergibt sich dann also zu

$$T \;=\; T(y) \;=\; \frac{1}{c_0} \int_{x_0}^{x_1} n(x, y(x))\; \sqrt{1 + y'(x)^2}\; dx \;\; .$$

**b)** Für $n = n(y)$ haben wir

$$T(y) \;=\; \frac{1}{c_0} \int_{x_0}^{x_1} n(y(x))\; \sqrt{1 + y'(x)^2}\; dx \;\; \overset{!}{\to} \;\; \min$$

Die Lagrange-Funktion ist dann also (den konstanten Vorfaktor $1/c_0$ lassen wir mal weg)

$$L \;=\; L(y, y') \;=\; n(y)\, \sqrt{1 + (y')^2}$$

und die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} \;-\; \frac{\partial L}{\partial y} \;=\; 0$$

Wir haben

$$\frac{\partial L}{\partial y} \;=\; n'(y)\, \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} \;=\; n(y)\, \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} &= \frac{d}{dx}\left\{ n(y)\,\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \right\} \\
&= n'(y)\,\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} \;+\; n(y)\,\frac{d}{dx}\left\{ \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \right\} \\
&= n'(y)\,\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} \;+\; n(y)\,\frac{y''\sqrt{1+(y')^2} \;-\; y'\frac{y'y''}{\sqrt{1+(y')^2}}}{1+(y')^2} \\
&= n'(y)\,\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} \;+\; n(y)\,\frac{y''\,[1+(y')^2] \;-\; (y')^2 y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= n'(y)\,\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} \;+\; n(y)\,\frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

Also,

$$
\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} \;-\; \frac{\partial L}{\partial y} \\
&= n'(y)\,\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} \;+\; n(y)\,\frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} \;-\; n'(y)\,\sqrt{1+(y')^2} \\
&= n'(y)\,\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} \;-\; \frac{n'(y)\,[1+(y')^2]}{\sqrt{1+(y')^2}} \;+\; n(y)\,\frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\;\frac{n'(y)}{\sqrt{1+(y')^2}} \;+\; n(y)\,\frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

und das ist äquivalent zu

$$
n(y)\,y'' \;=\; n'(y)\,[1+(y')^2]
$$

oder

$$
y'' \;=\; \frac{n'(y)}{n(y)}\,(1+y'^2) \;\; .
$$

**c)** Wir bekommen

$$
\begin{aligned}
H(y,y') &= y'\,\frac{\partial L}{\partial y'} \;-\; L \\
&= y'\,n(y)\,\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \;-\; n(y)\,\sqrt{1+(y')^2} \\
&= n(y)\,\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} \;-\; n(y)\,\frac{1+(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} \\
&= -\;\frac{n(y)}{\sqrt{1+(y')^2}} \;=\; \text{constant} \;=:\; -\,k
\end{aligned}
$$

**d)** Aus Teil (c) bekommen wir mit $y(0) = 0$ und $n(0) = 1 + 0 = 1$

$$\frac{n(y)}{\sqrt{1+(y')^2}} \quad = \quad k \quad = \quad \frac{n(y(0))}{\sqrt{1+(y'(0))^2}} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{1+(y_0')^2}}$$

mit

$$y_0' \quad = \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad = \quad \tan 30^\circ \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Also,

$$\frac{n(y)}{\sqrt{1+(y')^2}} \quad = \quad \frac{1+y}{\sqrt{1+(y')^2}} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}} \quad = \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

oder

$$(1+y)^2 \quad = \quad \frac{3}{4}\,[1+(y')^2]$$

Das ist äquivalent zu

$$y' \quad = \quad \sqrt{\frac{4}{3}\,(1+y)^2 \;-\; 1} \quad =: \quad F(y)$$

mit der Anfangsbedingung

$$y_0 \quad = \quad 0$$

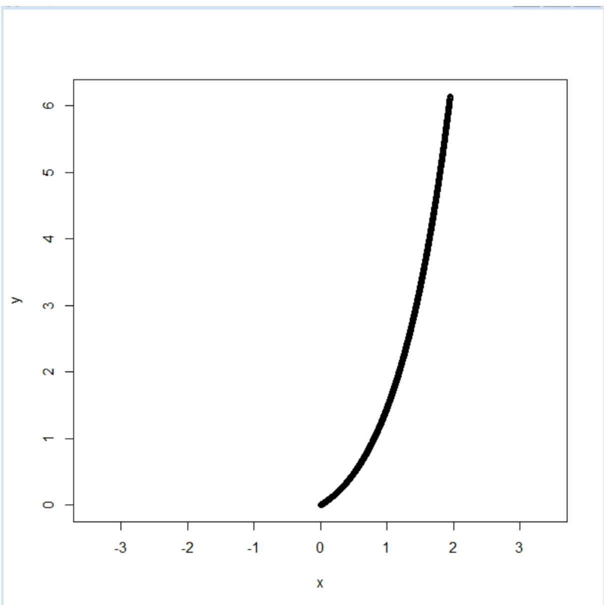
Wir lösen die DGL numerisch: Mit

$$y' \quad \approx \quad \frac{y(x+dx)-y(x)}{dx} \quad = \quad F(y(x))$$

bekommen wir die Rekursion

$$y(x+dx) \quad = \quad y(x) \;+\; F(y(x))\,dx$$

Es ergibt sich das folgende Bild:



**e)** Wie in Teil d) haben wir

$$\frac{n(y)}{\sqrt{1+(y')^2}} \;=\; k \;=\; \frac{n(y(0))}{\sqrt{1+(y'(0))^2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+(y_0')^2}}$$

wobei das $y_0'$ jetzt aber nicht bekannt ist, sondern so gewählt werden muss, dass das $y(x)$ durch den Punkt $(1,1)$ läuft. Wir bekommen

$$1+(y')^2 \;=\; [1+(y_0')^2]\, n(y)^2 \;=\; [1+(y_0')^2]\,(1+y)^2$$

oder

$$y' \;=\; \sqrt{[1+(y_0')^2]\,(1+y)^2 \,-\, 1}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ y_1 &= 1 \end{aligned}$$

Wir machen uns das Leben einfach und simulieren einfach die Lösungen für verschiedene $y_0' \in (0,1)$ und schauen dann, was am besten passt. Das heisst, wir notieren uns jeweils das Tripel $(y_0', 1, y(1))$ und wählen dann dasjenige, für das $y(1) \stackrel{!}{=} 1$ am besten hinkommt. Man bekommt etwa die folgenden Zahlen:

```
R Console
[1] 0.1100000 1.0000000 0.6795431
[1] 0.1200000 1.0000000 0.6927252
[1] 0.1300000 1.0000000 0.7060385
[1] 0.1400000 1.0000000 0.7194843
[1] 0.1500000 1.0000000 0.7330639
[1] 0.1600000 1.0000000 0.7467786
[1] 0.1700000 1.0000000 0.7606298
[1] 0.1800000 1.0000000 0.7746188
[1] 0.1900000 1.0000000 0.7887468
[1] 0.2000000 1.0000000 0.8030153
[1] 0.2100000 1.0000000 0.8174256
[1] 0.2200000 1.0000000 0.8319791
[1] 0.2300000 1.0000000 0.8466771
[1] 0.240000 1.000000 0.861521
[1] 0.2500000 1.0000000 0.8765123
[1] 0.2600000 1.0000000 0.8916523
[1] 0.2700000 1.0000000 0.9069425
[1] 0.2800000 1.0000000 0.9223843
[1] 0.2900000 1.0000000 0.9379792
[1] 0.3000000 1.0000000 0.9537286
[1] 0.3100000 1.0000000 0.9696341
[1] 0.3200000 1.0000000 0.9856971
[1] 0.330000 1.000000 1.001919
[1] 0.340000 1.000000 1.018302
[1] 0.350000 1.000000 1.034846
[1] 0.360000 1.000000 1.051555
[1] 0.370000 1.000000 1.068428
[1] 0.380000 1.000000 1.085469
[1] 0.390000 1.000000 1.102678
[1] 0.400000 1.000000 1.120057
[1] 0.410000 1.000000 1.137607
[1] 0.420000 1.000000 1.155331
[1] 0.43000 1.00000 1.17323
[1] 0.440000 1.000000 1.191306
[1] 0.45000 1.00000 1.20956
[1] 0.460000 1.000000 1.227995
[1] 0.470000 1.000000 1.246611
[1] 0.48000 1.00000 1.26541
[1] 0.490000 1.000000 1.284395
[1] 0.500000 1.000000 1.303568
[1] 0.510000 1.000000 1.322929
[1] 0.520000 1.000000 1.342481
[1] 0.530000 1.000000 1.362226
[1] 0.540000 1.000000 1.382165
[1] 0.5500 1.0000 1.4023
[1] 0.560000 1.000000 1.422634
[1] 0.570000 1.000000 1.443168
```

Also wählen wir

$$y'_0 \quad = \quad \frac{1}{3} \quad \approx \quad 0.33$$

das entspricht einem Einstrahlwinkel von

$$\alpha \quad = \quad \arctan(1/3) \quad \approx \quad 18.43^\circ$$

gemessen gegen die negative x-Achse, und schauen uns die Lösung dann nochmal separat an: