

Lösungen zum 8. Übungsblatt
Dynamik der Teilchen und Felder

1. Aufgabe: a) Wir haben

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 - mgz \\ &= \frac{m}{2} \{ \dot{x}^2 + \dot{z}^2 \} - mgz \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} z &= f(x) \\ z_t &= f(x_t) \\ \dot{z}_t &= f'(x_t) \dot{x}_t \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} L(x, \dot{x}) &= \frac{m}{2} \{ \dot{x}^2 + \dot{z}^2 \} - mgz \\ &= \frac{m}{2} \{ \dot{x}^2 + f'(x)^2 \dot{x}^2 \} - mgf(x) \\ &= \frac{m}{2} \{ 1 + f'(x)^2 \} \dot{x}^2 - mgf(x) \end{aligned} \quad (1)$$

b) Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Nun ist

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \{ 1 + f'(x)^2 \} \dot{x} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m \{ 1 + f'(x)^2 \} \ddot{x} + m 2 f'(x) f''(x) \dot{x} \dot{x} \\ &= m \{ 1 + f'(x)^2 \} \ddot{x} + 2m f'(x) f''(x) \dot{x}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m f'(x) f''(x) \dot{x}^2 - mg f'(x)$$

Wenn wir das in (2) einsetzen, bekommen wir also

$$m \{ 1 + f'(x)^2 \} \ddot{x} + 2m f'(x) f''(x) \dot{x}^2 - \{ m f'(x) f''(x) \dot{x}^2 - mg f'(x) \} = 0$$

oder

$$\{1 + f'(x)^2\} \ddot{x} + f'(x) f''(x) \dot{x}^2 + g f'(x) = 0 \quad (5)$$

c) Mit Gleichung (3) bekommen wir

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} = m \{1 + f'(x)^2\} \dot{x}^2$$

und damit

$$\begin{aligned} H(x, \dot{x}) &:= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L(x, \dot{x}) \\ &= m \{1 + f'(x)^2\} \dot{x}^2 - \left\{ \frac{m}{2} \{1 + f'(x)^2\} \dot{x}^2 - mg f(x) \right\} \\ &= \frac{m}{2} \{1 + f'(x)^2\} \dot{x}^2 + mg f(x) \end{aligned} \quad (6)$$

Dies ist eine Konstante der Bewegung, wegen $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 0)$ und

$$f(x_0) = f(0) = h$$

bekommen wir dann also

$$H(x_t, \dot{x}_t) = H(x_0, \dot{x}_0) = \frac{m}{2} \{1 + f'(0)^2\} 0^2 + mg f(0) = mgh$$

oder

$$\frac{m}{2} \{1 + f'(x_t)^2\} \dot{x}_t^2 + mg f(x_t) = mgh \quad (7)$$

Wir können das etwas umstellen und durch m teilen,

$$\{1 + f'(x_t)^2\} \dot{x}_t^2 = 2g[h - f(x)]$$

und bekommen

$$\dot{x} = \sqrt{2g} \sqrt{\frac{h-f(x)}{1+f'(x)^2}}. \quad (8)$$

d) Wegen $\dot{x} = dx/dt$ folgt aus Gleichung (8)

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2g} \sqrt{\frac{h-f(x)}{1+f'(x)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{h-f(x)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1+q'(x)^2}{q(x)}} dx$$

und damit erhalten wir für die Durchlaufzeit T mit $x_0 = 0$ und $x_T = \ell$:

$$T = \int_0^T dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_T} \sqrt{\frac{1+q'(x)^2}{q(x)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\ell \sqrt{\frac{1+q'(x)^2}{q(x)}} dx. \quad (9)$$

2.Aufgabe: Eine Gerade zwischen den Punkten $(0, h)$ und $(\ell, 0)$ ist gegeben durch die Gleichung

$$z = f(x) = h - \frac{h}{\ell} x$$

Die Schwerkraft mg wirkt in Richtung der negativen z -Achse und die Komponente F_{tang} tangential an die schiefe Ebene, das ist die Komponente, die die Beschleunigung verursacht, ist gegeben durch

$$\frac{F_{\text{tang}}}{mg} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \ell^2}},$$

das ist beides gleich dem Sinus des Neigungswinkels der schiefen Ebene. Bezeichnen wir den auf der schiefen Ebene zurückgelegten Weg des Teilchens mit $s(t)$, dann gilt also

$$m\ddot{s}(t) = F_{\text{tang}} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \ell^2}} mg$$

oder

$$\ddot{s}(t) = \frac{F_{\text{tang}}}{m} = \frac{hg}{\sqrt{h^2 + \ell^2}}$$

Mit

$$s(0) = \dot{s}(0) = 0$$

folgt daraus

$$s(t) = \frac{hg t^2}{2\sqrt{h^2 + \ell^2}}$$

Die Strecke, die bis zum Endpunkt $(0, \ell)$ zurückgelegt werden muss, ist

$$s(T) = \sqrt{h^2 + \ell^2}$$

Also bekommen wir

$$\frac{hg T^2}{2\sqrt{h^2 + \ell^2}} = \sqrt{h^2 + \ell^2}$$

oder

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{\frac{h^2 + \ell^2}{h}}$$

Die Formel aus Aufgabe 1d liefert mit

$$q(x) = h - f(x) = \frac{h}{\ell} x$$

$$q'(x) = \frac{h}{\ell}$$

die Zeit

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\ell \sqrt{\frac{1+q'(x)^2}{q(x)}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\ell \sqrt{\frac{1+h^2/\ell^2}{\frac{h}{\ell} x}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\ell^2+h^2}{h y}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{\ell^2+h^2}{h}} 2\sqrt{y} \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{\frac{h^2 + \ell^2}{h}} \end{aligned}$$

und das stimmt mit dem Ergebnis von weiter oben überein.