

**Lösungen zum 6. Übungsblatt  
 Dynamik der Teilchen und Felder**

**1. Aufgabe:** Wir haben

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$$

so dass

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}^k = (-1)^k \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = (-1)^k \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & A^k \\ -A^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Mit  $A = \Omega^2$  können wir schreiben

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k} = (-1)^k \begin{pmatrix} \Omega^{2k} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} &= (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{2k} \\ -\Omega^{2k+2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^k \begin{pmatrix} \Omega^{2k+1} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1} \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit bekommen wir also

$$\begin{aligned} \exp \left\{ t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} \\ &\stackrel{(1,1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} \Omega^{2k} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k} \end{pmatrix} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} \Omega^{2k+1} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1} \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit den Potenzreihenentwicklungen

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\end{aligned}$$

bekommen wir dann

$$\begin{aligned}\exp \left\{ t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right\} &= \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(\Omega t) & 0 \\ 0 & \sin(\Omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1} \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) \Omega^{-1} \\ -\sin(\Omega t) \Omega & \cos(\Omega t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Damit ist die Formel bewiesen. ■

**2.Aufgabe:** Wir schreiben

$$\begin{aligned}\exp \left\{ t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & -2\mu \end{pmatrix} \right\} &= \exp \left\{ t \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \right\} \\ &= \exp \left\{ -\mu t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \right\} \\ &= \exp \left\{ -\mu t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \times \exp \left\{ t \begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \right\} \\ &= e^{-\mu t} \times \exp \left\{ t \begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \right\}\end{aligned}$$

Weiterhin bekommen wir mit

$$A := \begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix}$$

die folgenden Potenzen:

$$\begin{aligned}A^2 &= \begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu^2 - \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 - \varepsilon^2 \end{pmatrix} = -\omega^2 Id\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}A^{2k} &= (-1)^k \omega^{2k} Id \\ A^{2k+1} &= (-1)^k \omega^{2k} A = (-1)^k \omega^{2k+1} \frac{A}{\omega}\end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(t\omega)^{2k}}{(2k)!} Id + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(t\omega)^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{A}{\omega} \\ &= \cos(\omega t) Id + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} A \\ &= \cos \omega t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin \omega t}{\omega} \begin{pmatrix} +\mu & +1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist die Formel bewiesen. ■