Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2023/24

Lösungen zum 5. Übungsblatt
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: **a)** Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L &= \text{kinetische Energie} - \text{potentielle Energie} \\ &= T - V \\ &= \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^2 - mg\,z \end{aligned} \tag{1}$$

Wir müssen L durch die verallgemeinerten Koordinaten r und φ ausdrücken. Das heisst also, wir müssen die Grössen $\dot{\vec{x}}^2$ und z durch die Koordinaten r und φ ausdrücken. Bei z geht das sehr schnell, das Kügelchen muss sich ja auf dem Kegel befinden, und auf dem Kegel ist ja

$$z = x_3(r,\varphi) = c\,r \tag{2}$$

Um $\dot{\vec{x}}^2$ zu berechnen, schreiben wir

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ c\,r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ c \end{pmatrix} =: r\,\vec{v}$$

mit

$$\vec{v} := \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ c \end{pmatrix}$$

Wir schreiben hier $\vec{v}$ und nicht $\vec{e}$, weil das $\vec{v}$ nicht normiert ist, es ist $\|\vec{v}\| = \sqrt{1+c^2}$ und nicht wie bei den $\vec{e}$'s $\|\vec{e}\| = 1$. Es gilt dann

$$\dot{\vec{v}} = \dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

mit

$$\vec{e}_\varphi := \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist

$$\vec{v}\cdot\vec{e}_\varphi = -\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi + c\cdot 0 = 0$$

Wir bekommen dann

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \dot{r}\,\vec{v} + r\,\dot{\vec{v}} \\ &= \dot{r}\,\vec{v} + r\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}^2 &= \dot{r}^2\,\vec{v}^2 \;+\; 2\,r\dot{r}\,\dot{\varphi}\,\vec{v}\,\vec{e}_\varphi \;+\; r^2\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\varphi^{\,2} \\ &= \dot{r}^2\,(1+c^2) \;+\; 0 \;+\; r^2\,\dot{\varphi}^2\cdot 1 \\ &= \dot{r}^2\,(1+c^2) \;+\; r^2\,\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

Also erhalten wir für die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L &= T \;-\; V \\ &= \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^2 \;-\; mg\,z \\ &= \tfrac{m}{2}\left\{\,\dot{r}^2\,(1+c^2) \;+\; r^2\,\dot{\varphi}^2\,\right\} \;-\; mg\,cr \end{aligned}$$

b) Die Lagrange-Funktion lautet nach Teil (a):

$$L \;=\; L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}) \;=\; \tfrac{m}{2}\left\{\,\dot{r}^2\,(1+c^2) \;+\; r^2\,\dot{\varphi}^2\,\right\} \;-\; mg\,cr \tag{3}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind gegeben durch

$$\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} \;-\; \tfrac{\partial L}{\partial r} \;=\; 0 \tag{4}$$

$$\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \;-\; \tfrac{\partial L}{\partial \varphi} \;=\; 0 \tag{5}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\varphi}^2 \;-\; mgc \\ \tfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}\,(1+c^2) \\ \tfrac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \\ \tfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= mr^2\dot{\varphi} \end{aligned}$$

Damit ist Gleichung (4) äquivalent zu

$$m\ddot{r}\,(1+c^2) \;-\; mr\dot{\varphi}^2 \;+\; mgc \;=\; 0 \tag{6}$$

und Gleichung (5) ist äquivalent zu

$$\tfrac{d}{dt}\big\{mr^2\dot{\varphi}\big\} \;=\; m\big\{2r\dot{r}\dot{\varphi} \;+\; r^2\ddot{\varphi}\big\} \;=\; 0 \tag{7}$$

Wenn wir Gleichung (6) durch m und Gleichung (7) durch mr dividieren, erhalten wir damit das System

$$(1+c^2)\,\ddot{r} \;-\; r\,\dot{\varphi}^2 \;+\; gc \;=\; 0 \tag{8}$$

$$2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} \;+\; r\,\ddot{\varphi} \;=\; 0 \tag{9}$$

Das sind dann also die Bewegungsgleichungen des Systems. Dabei ist die Gleichung (7) vielleicht etwas informativer als die Gleichung (9), es folgt aus beiden Gleichungen

$$r^2\,\dot{\varphi} \;=\; \text{constant}\;, \tag{10}$$

das ist bei Gleichung (9) aber nicht mehr sofort offensichtlich.

2.Aufgabe: **a)** Die Nebenbedingungen für das Doppelpendel lauten:

$$g_1(x_1, y_1, x_2, y_2) \;:=\; x_1^2 + y_1^2 - \ell_1^2 \;=\; 0 \tag{11}$$

$$g_2(x_1, y_1, x_2, y_2) \;:=\; (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \ell_2^2 \;=\; 0 \tag{12}$$

Die Zwangskräfte sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{Z}_i &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \,\nabla_{\vec{x}_i}\, g_k \\ &\overset{\text{hier}}{=} \lambda_1 \,\nabla_{\vec{x}_i}\, g_1 + \lambda_2 \,\nabla_{\vec{x}_i}\, g_2 \end{aligned} \tag{13}$$

Also,

$$\vec{Z}_1 \;=\; \lambda_1 \,\nabla_{\vec{x}_1}\, g_1 + \lambda_2 \,\nabla_{\vec{x}_1}\, g_2 \tag{14}$$

$$\vec{Z}_2 \;=\; \lambda_1 \,\nabla_{\vec{x}_2}\, g_1 + \lambda_2 \,\nabla_{\vec{x}_2}\, g_2 \tag{15}$$

oder konkret

$$\vec{Z}_1 \;=\; 2\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - 2\lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\vec{Z}_2 \;=\; \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

b) Wir haben

$$\vec{x}_1 \;=\; \vec{x}_1(\varphi_1) \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \;=\; \ell_1 \begin{pmatrix} \sin\varphi_1 \\ -\cos\varphi_1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\vec{x}_2 \;=\; \vec{x}_2(\varphi_1, \varphi_2) \;=\; \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \;=\; \vec{x}_1(\varphi_1) + \ell_2 \begin{pmatrix} \sin\varphi_2 \\ -\cos\varphi_2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

und damit

$$\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi_1} \;=\; \ell_1 \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi_2} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\frac{\partial \vec{x}_2}{\partial \varphi_1} \;=\; \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi_1} \;=\; \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\frac{\partial \vec{x}_2}{\partial \varphi_2} \;=\; \ell_2 \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -(y_2 - y_1) \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

c) Wir bekommen

$$\begin{aligned}
\vec{Z} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi_1} &= \vec{Z}_1 \cdot \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi_1} + \vec{Z}_2 \cdot \frac{\partial \vec{x}_2}{\partial \varphi_1} \\
&= \left\{ 2\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - 2\lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + 2\lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \\
&= -2\lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + 2\lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad (24) \\
&= 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\vec{Z} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi_2} &= \vec{Z}_1 \cdot \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi_2} + \vec{Z}_2 \cdot \frac{\partial \vec{x}_2}{\partial \varphi_2} \\
&= \vec{Z}_1 \cdot \vec{0} + 2\lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(y_2 - y_1) \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} \\
&= 0 \qquad (25)
\end{aligned}$$

aber, wie man in Gleichung (24) sieht, tun die individuellen Skalarprodukte

$$\vec{Z}_1 \cdot \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi_1} \quad \text{und} \quad \vec{Z}_2 \cdot \frac{\partial \vec{x}_2}{\partial \varphi_1}$$

nicht jeweils für sich verschwinden.