Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2023/24

Lösungen zum 4. Übungsblatt
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{a} \;=\; \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \;=:\; a_1\,\vec{e}_1 \,+\, a_2\,\vec{e}_2 \,+\, a_3\,\vec{e}_3$$

war das Vektorprodukt $\vec{a}\times\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{a}\times\vec{b} \;:=\; \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Insbesondere gilt also

$$\vec{a}\times\vec{a} \;=\; \vec{0}\,.$$

a) Wir haben

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\vec{L} \;&=\; m\tfrac{d}{dt}\left\{\vec{x}\times\dot{\vec{x}}\right\} \\ &=\; m\big\{\dot{\vec{x}}\times\dot{\vec{x}} \,+\, \vec{x}\times\ddot{\vec{x}}\big\} \\ &=\; m\big\{\vec{0} \,+\, \vec{x}\times\vec{0}\big\} \;=\; \vec{0}\,. \end{aligned}$$

b) Wir haben jetzt

$$\begin{aligned} m\,\ddot{\vec{x}} \;&=\; \vec{F} \,+\, \vec{Z} \\ &=\; -mg\,\vec{e}_3 \,+\, \lambda\,\vec{e}_r \\ &=\; -mg\,\vec{e}_3 \,+\, \tfrac{\lambda}{r}\,r\vec{e}_r \\ &=\; -mg\,\vec{e}_3 \,+\, \tfrac{\lambda}{r}\,\vec{x} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\vec{L} \;&=\; m\tfrac{d}{dt}\left\{\vec{x}\times\dot{\vec{x}}\right\} \\ &=\; m\big\{\dot{\vec{x}}\times\dot{\vec{x}} \,+\, \vec{x}\times\ddot{\vec{x}}\big\} \\ &=\; \vec{x}\times\big\{m\,\ddot{\vec{x}}\big\} \\ &=\; \vec{x}\times\big\{-mg\,\vec{e}_3 \,+\, \tfrac{\lambda}{r}\,\vec{x}\big\} \\ &=\; -mg\,\vec{x}\times\vec{e}_3 \,+\, \tfrac{\lambda}{r}\,\vec{x}\times\vec{x} \\ &=\; -mg\,\vec{x}\times\vec{e}_3 \end{aligned}$$

mit dem Vektorprodukt

$$\vec{x}\times\vec{e}_3 \;=\; \det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & x & 0\\ \vec{e}_2 & y & 0\\ \vec{e}_3 & z & 1\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} y\\ -x\\ 0\end{pmatrix}$$

Also haben wir

$$\tfrac{d}{dt}L_3 \;=\; 0\,.$$

c) In dem `week4.pdf` hatten wir in Gleichung (5) die folgenden Formeln hergeleitet:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{e}}_r &= \dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \;+\; \dot\theta\,\vec{e}_\theta\\ \dot{\vec{e}}_\varphi &= -\dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_r \;-\; \dot\varphi\,\cos\theta\,\vec{e}_\theta\\ \dot{\vec{e}}_\theta &= \dot\varphi\,\cos\theta\,\vec{e}_\varphi \;-\; \dot\theta\,\vec{e}_r\end{aligned}$$

Hier brauchen wir nur die erste Gleichung davon und bekommen

$$\begin{aligned}\vec{x} &= r\,\vec{e}_r\\ \dot{\vec{x}} &= \dot r\,\vec{e}_r \;+\; r\,\dot{\vec{e}}_r\\ &= \tfrac{\dot r}{r}\,r\vec{e}_r \;+\; r\left\{\dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \;+\; \dot\theta\,\vec{e}_\theta\right\}\\ &= \tfrac{\dot r}{r}\,\vec{x} \;+\; r\dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \;+\; r\dot\theta\,\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

Das können wir in das $\vec{L}$ einsetzen,

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{x}\times\vec{p} \;=\; m\,\vec{x}\times\dot{\vec{x}}\\ &= m\,\vec{x}\times\left\{\tfrac{\dot r}{r}\,\vec{x} \;+\; r\dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \;+\; r\dot\theta\,\vec{e}_\theta\right\}\\ &= m\,\vec{x}\times\left\{r\dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \;+\; r\dot\theta\,\vec{e}_\theta\right\}\\ &= mr\,\vec{e}_r\times\left\{r\dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \;+\; r\dot\theta\,\vec{e}_\theta\right\}\\ &= mr^2\dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi \;+\; mr^2\dot\theta\,\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

Wir berechnen die Vekorprodukte,

$$\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi \;=\; \det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \cos\varphi\,\sin\theta & -\sin\varphi\\ \vec{e}_2 & \sin\varphi\,\sin\theta & \cos\varphi\\ \vec{e}_3 & \cos\theta & 0\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}-\cos\varphi\,\cos\theta\\ -\sin\varphi\,\cos\theta\\ +\sin\theta\end{pmatrix} \;=\; -\,\vec{e}_\theta$$

und

$$\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta \;=\; \det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \cos\varphi\,\sin\theta & \cos\varphi\,\cos\theta\\ \vec{e}_2 & \sin\varphi\,\sin\theta & \sin\varphi\,\cos\theta\\ \vec{e}_3 & \cos\theta & -\sin\theta\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} \;=\; +\vec{e}_\varphi$$

Also,

$$\begin{aligned}\vec{L} &= mr^2\dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi \;+\; mr^2\dot\theta\,\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta\\ &= -\,mr^2\dot\varphi\,\sin\theta\,\vec{e}_\theta \;+\; mr^2\dot\theta\,\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

und, da die z-Komponente von $\vec{e}_\varphi$ null ist und die von $\vec{e}_\theta$ gleich $-\sin\theta$,

$$L_3 \;=\; +m\,r^2\,\dot\varphi\,\sin^2\theta\,.$$

2.Aufgabe: Wir haben die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\{\,\dot\varphi \sin^2\theta\,\} &= 0 \\ \ddot\theta \;-\; \dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta \;-\; \tfrac{g}{R}\sin\theta &= 0 \end{aligned}$$

oder, wenn c eine zeitunabhängige Konstante bezeichnet,

$$\dot\varphi \sin^2\theta = c \tag{1}$$

$$\ddot\theta \;-\; \dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta \;-\; \tfrac{g}{R}\sin\theta = 0 \tag{2}$$

a) Wenn sich das Kügelchen auf horizontalen Kreisen bewegen soll, dann muss der Winkel θ konstant sein,

$$\theta_t = \theta_0 \tag{3}$$

Insbesondere sind dann also die erste und die zweite Ableitung von θ gleich null,

$$\dot\theta = \ddot\theta = 0$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) wird dann also

$$\dot\varphi \sin^2\theta_0 = c \tag{4}$$

$$-\,\dot\varphi^2 \sin\theta_0\cos\theta_0 \;-\; \tfrac{g}{R}\sin\theta_0 = 0 \tag{5}$$

Wir haben einmal die spezielle Lösung $\sin\theta_0 = 0$ oder $\theta_0 = \pi$, wo das Kügelchen einfach am tiefsten Punkt der Schüssel bei $\vec{x} = (0,0,-R)$ ruht (die instabile Lösung $\theta = 0$ oder $\vec{x} = (0,0,+R)$ würde man vielleicht noch für ein starres sphärisches Pendel angeben, aber wir haben ja gesagt, dass wir hier eine Schüssel haben..).

Für $\sin\theta_0 \neq 0$ können wir durch $\sin\theta_0$ oder $\sin^2\theta_0$ teilen und bekommen

$$\dot\varphi = \tfrac{c}{\sin^2\theta_0} =: \omega_0 \tag{6}$$

$$-\,\dot\varphi^2 \cos\theta_0 \;-\; \tfrac{g}{R} = 0 \tag{7}$$

Also muss sich das Teilchen mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot\varphi_0 = \omega_0$ bewegen, und wenn sich das Teilchen auf einem Breitenkreis mit Winkel θ_0 bewegen soll, dann muss die Winkelgeschwindigkeit ω_0 wie folgt gewählt werden:

$$\omega_0^2 \cos\theta_0 \;+ g/R = 0$$

oder

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R(-\cos\theta_0)}} \tag{8}$$

Beachten Sie, dass wegen $\theta_0 \in [\pi/2, \pi]$ die Grösse $-\cos\theta_0$ im Nenner von (8) positiv ist.

b) Für $\dot{\varphi} = 0$ erhalten wir aus Gleichung (2)

$$\ddot{\theta} \; - \; \tfrac{g}{R} \sin\theta \;\; = \;\; 0 \tag{9}$$

Mit der Substitution $\theta = \pi - \alpha$ bekommen wir

$$\ddot{\theta} \;\; = \;\; -\ddot{\alpha}$$

und

$$\sin\theta \;\; = \;\; \sin(\pi - \alpha) \;\; = \;\; \sin\alpha$$

Wenn wir das in (9) einsetzen, bekommen wir also

$$-\ddot{\alpha} \; - \; \tfrac{g}{R} \sin\alpha \;\; = \;\; 0$$

oder

$$\ddot{\alpha} \; + \; \tfrac{g}{R} \sin\alpha \;\; = \;\; 0 \tag{10}$$

Jetzt betrachten wir den Fall kleiner Auslenkungen $\alpha \ll 1$ so dass wir also die Näherung

$$\sin\alpha \;\; = \;\; \alpha \; - \; \tfrac{\alpha^3}{3!} \; + \; \tfrac{\alpha^5}{5!} \; \mp \cdots \;\; \approx \;\; \alpha$$

machen können. Aus (10) erhalten wir dann

$$\ddot{\alpha} \; + \; \tfrac{g}{R} \, \alpha \;\; = \;\; 0 \tag{11}$$

Gleichung (11) ist die Differentialgleichung für den harmonischen Oszillator. Als lineare Differentialgleichung 2. Ordnung hat sie 2 linear unabhängige Lösungen, diese sind gegeben durch $e^{\pm i\omega t}$, oder, wenn wir es gleich reell machen, durch $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$. Wenn man das in (11) einsetzt, bekommt man für ω die Gleichung

$$-\omega^2 \; + \; \tfrac{g}{R} \;\; = \;\; 0$$

oder $\omega = \pm\sqrt{\frac{g}{R}}$. Wegen $\cos(-\omega t) = \cos(\omega t)$ und $\sin(-\omega t) = -\sin(\omega t)$ liefert das negative ω keine zusätzlichen neuen Lösungen, wir nehmen also

$$\omega \;\; = \;\; \sqrt{\tfrac{g}{R}} \;\; =: \;\; \omega_0 \tag{12}$$

und bekommen dann die allgemeine Lösung

$$\alpha(t) \;\; = \;\; c_1 \, \cos(\omega_0 t) \; + \; c_2 \, \sin(\omega_0 t) \tag{13}$$

Die Kontanten c_1 und c_2 werden wie üblich aus den Anfangsbedingungen, das ist die Anfangsauslenkung α_0 und die anfängliche Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha}_0$, bestimmt:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \; = \; \alpha(0) \;\; &= \;\; c_1 \, \cos(0) \; + \; c_2 \, \sin(0) \\ \dot{\alpha}_0 \; = \; \dot{\alpha}(0) \;\; &= \;\; -c_1 \, \omega_0 \, \sin(0) \; + \; c_2 \, \omega_0 \, \cos(0) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \alpha_0 \;\; &= \;\; c_1 \\ \dot{\alpha}_0 \;\; &= \;\; c_2 \, \omega_0 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir dann also das End-Resultat

$$\alpha(t) \;\; = \;\; \alpha_0 \, \cos(\omega_0 t) \; + \; \tfrac{\dot{\alpha}_0}{\omega_0} \, \sin(\omega_0 t) \;\; . \tag{14}$$