Hochschule RheinMain

Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2023/24

Lösungen zum 3. Übungsblatt
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Es war

$$\vec{x}(t) \;=\; \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \;=\; r_t \begin{pmatrix} \cos\varphi_t \\ \sin\varphi_t \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{e}_r \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi_t \\ \sin\varphi_t \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi \;=\; \begin{pmatrix} -\sin\varphi_t \\ \cos\varphi_t \end{pmatrix}$$

a) Wir haben

$$\|\vec{e}_r\|^2 \;=\; \|\vec{e}_\varphi\|^2 \;=\; \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \;=\; 1$$

und

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi \;=\; -\cos\varphi\,\sin\varphi \,+\, \cos\varphi\,\sin\varphi \;=\; 0$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r &= \dot\varphi \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = \dot\varphi\,\vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi &= \dot\varphi \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} = -\dot\varphi\,\vec{e}_r \end{aligned}$$

c) Wir haben

$$\vec{x} \;=\; r\,\vec{e}_r$$

und damit

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \dot r\,\vec{e}_r \,+\, r\,\dot{\vec{e}}_r \\ &= \dot r\,\vec{e}_r \,+\, r\,\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

d) Da die Vektoren $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ eine Orthonormalbasis bilden, bekommen wir

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}^2 &= \big(\dot r\,\vec{e}_r \,+\, r\,\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi\big)^2 \\ &= \dot r^2\,\vec{e}_r^{\,2} \,+\, 2\,\dot r\,r\,\dot\varphi\,\vec{e}_r\vec{e}_\varphi \,+\, r^2\,\dot\varphi^2\,\vec{e}_\varphi^{\,2} \\ &= \dot r^2 \,+\, r^2\,\dot\varphi^2 \end{aligned}$$

e) Aus Teil (c) folgt

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{x}} &= \tfrac{d}{dt}\dot{\vec{x}} = \tfrac{d}{dt}\left\{\dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right\} \\
&= \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\,\dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_\varphi \\
&\overset{(b)}{=} \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{r}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\,\dot{\varphi}\,(-\dot{\varphi}\,\vec{e}_r) \\
&= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi\,.
\end{aligned}$$

2.Aufgabe: **a)** Die Lagrange-Funktion L ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
L &= \text{kinetische Energie} - \text{potentielle Energie} \\
&= T - V \\
&\overset{V=0}{=} T \\
&= \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^2 \\
&\overset{(1d)}{=} \tfrac{m}{2}\left\{\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2\right\}
\end{aligned}$$

b) Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{2}$$

Offensichtlich ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\varphi}^2 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} \\
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= mr^2\dot{\varphi}
\end{aligned}$$

Damit ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = 0 \tag{3}$$

und Gleichung (2) ist äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}\left\{mr^2\dot{\varphi}\right\} = m\left\{2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}\right\} = 0 \tag{4}$$

Wenn wir Gleichung (3) durch m und Gleichung (4) durch mr dividieren, erhalten wir also das System

$$\begin{aligned}
\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 &= 0 \\
2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi} &= 0\,.
\end{aligned}$$