Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2023/24

Lösungen zum 2. Übungsblatt
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Wir haben

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma_s\,ds} &= -\tfrac{\gamma_t}{2}\,e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma_s\,ds}\\ \tfrac{d^2}{dt^2}e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma_s\,ds} &= -\tfrac{\dot\gamma_t}{2}\,e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma_s\,ds} + \tfrac{\gamma_t^2}{4}\,e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma_s\,ds}\end{aligned}$$

und es gilt die Formel

$$\tfrac{d^2}{dt^2}(f\cdot g) = \tfrac{d^2 f}{dt^2}\cdot g + 2\tfrac{df}{dt}\cdot\tfrac{dg}{dt} + f\cdot\tfrac{d^2 g}{dt^2}$$

Mit der Abkürzung

$$\Gamma_t := e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma_s\,ds}$$

bekommen wir dann

$$\begin{aligned}\dot x_t &= \tfrac{d}{dt}(\Gamma_t\cdot y_t) = -\tfrac{\gamma_t}{2}\,\Gamma_t\cdot y_t + \Gamma_t\cdot\dot y_t\\ \ddot x_t &= \tfrac{d^2}{dt^2}(\Gamma_t\cdot y_t)\\ &= \tfrac{d^2}{dt^2}\Gamma_t\cdot y_t + 2\,\tfrac{d}{dt}\Gamma_t\cdot\dot y_t + \Gamma_t\cdot\tfrac{d^2 g}{dt^2}\\ &= -\tfrac{\dot\gamma_t}{2}\,\Gamma_t\cdot y_t + \tfrac{\gamma_t^2}{4}\,\Gamma_t\cdot y_t - \gamma_t\,\Gamma_t\cdot\dot y_t + \Gamma_t\cdot\ddot y_t\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\ddot x_t + \gamma_t\,\dot x_t + \omega^2 x_t &= -\tfrac{\dot\gamma_t}{2}\,\Gamma_t\cdot y_t + \tfrac{\gamma_t^2}{4}\,\Gamma_t\cdot y_t - \gamma_t\,\Gamma_t\cdot\dot y_t + \Gamma_t\cdot\ddot y_t\\ &\quad + \gamma_t\left\{-\tfrac{\gamma_t}{2}\,\Gamma_t\cdot y_t + \Gamma_t\cdot\dot y_t\right\} + \omega^2\,\Gamma_t\cdot y_t\\ &= \Gamma_t\cdot y_t\left\{-\tfrac{\dot\gamma_t}{2} + \tfrac{\gamma_t^2}{4} - \tfrac{\gamma_t^2}{2} + \omega^2\right\}\\ &\quad - \gamma_t\,\Gamma_t\cdot\dot y_t + \gamma_t\,\Gamma_t\cdot\dot y_t + \Gamma_t\cdot\ddot y_t\\ &= \Gamma_t\Big(\ddot y_t + \left\{\omega^2 - \tfrac{\gamma_t^2}{4} - \tfrac{\dot\gamma_t}{2}\right\} y_t\Big)\end{aligned}$$

Wegen $\Gamma_t \neq 0$ folgt dann die Äquivalenz zu

$$\ddot y_t + \omega_t^2\,y_t = 0$$

mit

$$\omega_t^2 \;=\; \omega^2 \,-\, \tfrac{\gamma_t^2}{4} \,-\, \tfrac{\dot\gamma_t}{2} \;\;.$$

2.Aufgabe: a) Wir haben

$$\begin{aligned} \gamma_t &= 2\mu\sin(\mu t) \\ \textstyle\int_0^t \gamma_s\, ds &= -2\,\cos(\mu s)\big|_0^t \;=\; 2[1-\cos(\mu t)] \end{aligned}$$

also ist der Dämpfungsfaktor gegeben durch

$$\Gamma_t \;=\; e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma_s\, ds} \;=\; e^{-[1-\cos(\mu t)]}$$

b) Wir bekommen

$$\begin{aligned} \omega_t^2 &= \omega^2 - \tfrac{\gamma_t^2}{4} - \tfrac{\dot\gamma_t}{2} \\ &= 1 - \mu^2\,\sin^2(\mu t) - \mu^2\,\cos(\mu t) \end{aligned}$$

c) Wegen

$$\mu^2 \;=\; \frac{1}{50^2} \;=\; \frac{1}{2500} \;=\; \frac{4}{10000} \;=\; 0.0004$$

ist $\omega_t^2 \approx 1$ offensichtlich eine plausible Näherung. Die DGL für y_t lautet dann

$$\ddot y_t \,+\, y_t \;=\; 0$$

und hat zu den Anfangsbedingungen $y_0 = 1$ und $\dot y_0 = 0$ die Lösung

$$y_t \;=\; \cos t$$

Damit ist dann

$$x_t \;=\; e^{-[1-\cos(\mu t)]} \cdot \cos t$$

eine approximative Lösung der gegebenen DGL und erfüllt ebenfalls die Anfangsbedingungen $x_0 = 1$ und $\dot x_0 = 0$.