Hochschule RheinMain WS 2023/24
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen zum 13. Übungsblatt
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: a) Wir haben

$$\Delta(f \cdot g) \;=\; \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}(f \cdot g)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}(f \cdot g) \;&=\; \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot g \,+\, f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} \Big) \\ &=\; \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \cdot g \,+\, \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} \,+\, \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} \,+\, f \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x_k^2} \end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned} \Delta(f \cdot g) \;&=\; \sum_{k=1}^{3} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \cdot g \,+\, 2\,\frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} \,+\, f \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x_k^2} \Big) \\ &=\; \Delta f \cdot g \,+\, 2\,\nabla f \cdot \nabla g \,+\, f \cdot \Delta g \end{aligned}$$

b) Mit dem Ansatz Ansatz

$$\psi_t(x) \;=\; a(x,t) \,\cdot\, e^{\frac{i}{\hbar}\,\varphi(x,t)}$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} &i\,\hbar\Big(\frac{\partial a}{\partial t} \,\cdot\, e^{\frac{i}{\hbar}\varphi} \,+\, a \,\cdot\, \frac{i}{\hbar}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\, e^{\frac{i}{\hbar}\varphi} \Big) \;= \\ &\qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\Big\{ \Delta a \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\varphi} \,+\, 2\,\nabla a \cdot \nabla e^{\frac{i}{\hbar}\varphi} \,+\, a \cdot \Delta e^{\frac{i}{\hbar}\varphi} \Big\} \;+\; V\,a\,e^{\frac{i}{\hbar}\varphi} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &\Big(i\,\hbar\,\frac{\partial a}{\partial t} \,-\, a\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big)\, e^{\frac{i}{\hbar}\varphi} \;= \\ &\qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\Big\{ \Delta a \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\varphi} \,+\, \frac{2i}{\hbar}\,(\nabla a \cdot \nabla \varphi)\; e^{\frac{i}{\hbar}\varphi} \,+\, a \cdot \Delta e^{\frac{i}{\hbar}\varphi} \Big\} \;+\; V\,a\,e^{\frac{i}{\hbar}\varphi} \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\, e^{\frac{i}{\hbar}\varphi} \;=\; \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{i}{\hbar}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, e^{\frac{i}{\hbar}\varphi}\Big) \;=\; \Big(\frac{i}{\hbar}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2} \;-\; \frac{1}{\hbar^2}\big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\big)^2\Big)\, e^{\frac{i}{\hbar}\varphi}$$

$$\Delta\, e^{\frac{i}{\hbar}\varphi} \;=\; \Big(\frac{i}{\hbar}\,\Delta\varphi \;-\; \frac{1}{\hbar^2}\,|\nabla\varphi|^2\Big)\, e^{\frac{i}{\hbar}\varphi}$$

und wir bekommen

$$\begin{aligned} i\,\hbar\,\frac{\partial a}{\partial t} \;-\; a\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} \;&=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\Big\{\Delta a \;+\; \frac{2i}{\hbar}\,\nabla a\cdot\nabla\varphi \;+\; a\cdot\big(\frac{i}{\hbar}\,\Delta\varphi \;-\; \frac{1}{\hbar^2}\,|\nabla\varphi|^2\big)\Big\} \;+\; V\,a \\ &=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta a \;-\; \frac{i\,\hbar}{m}\,\nabla a\cdot\nabla\varphi \;-\; \frac{i\,\hbar}{2m}\,a\cdot\Delta\varphi \;+\; \frac{1}{2m}\,a\cdot|\nabla\varphi|^2 \;+\; V\,a \end{aligned}$$

Wir nehmen den Real- und Imaginärteil davon und bekommen so zwei reelle Gleichungen. Für den Imaginärteil,

$$\hbar\,\frac{\partial a}{\partial t} \;=\; -\,\frac{1\,\hbar}{m}\,\nabla a\cdot\nabla\varphi \;-\; \frac{1\,\hbar}{2m}\,a\cdot\Delta\varphi \tag{1}$$

Und für den Realteil,

$$-\,a\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} \;=\; -\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta a \;+\; \frac{1}{2m}\,a\cdot|\nabla\varphi|^2 \;+\; V\,a \tag{2}$$

Bei der Gleichung (1) können wir direkt das $\hbar$ rausdividieren,

$$\frac{\partial a}{\partial t} \;=\; -\,\frac{1}{m}\,\nabla a\cdot\nabla\varphi \;-\; \frac{1}{2m}\,a\cdot\Delta\varphi \tag{3}$$

und erhalten so die Gleichung (6) vom ÜBlatt 10. Die Gleichung (2) können wir noch durch das a teilen und erhalten dann die Gleichung (5) vom ÜBlatt 10,

$$-\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} \;=\; \frac{1}{2m}\,|\nabla\varphi|^2 \;+\; V \;-\; \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\Delta a}{a} \tag{4}$$

c) Anstatt für die Amplitude a wollen wir eine Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(x,t) \;=\; |\psi_t(x)|^2 \;=\; a^2(x,t) \tag{5}$$

herleiten. Wir bekommen

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} \;&=\; 2\,a\,\frac{\partial a}{\partial t} \\ &\overset{(3)}{=}\; -\,\frac{2}{m}\,a\,\nabla a\cdot\nabla\varphi \;-\; \frac{1}{m}\,a^2\cdot\Delta\varphi \\ &=\; -\,\mathrm{div}\Big(a^2\cdot\frac{\nabla\varphi}{m}\Big) \end{aligned}$$

Also mit $a^2 = \rho$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \;+\; \mathrm{div}\Big(\rho \cdot \frac{\nabla\varphi}{m}\Big) \;=\; 0 \tag{6}$$

d,e) Bei der Gleichung (4) sind alle Terme bis auf der letzte auf der rechten Seite unabhängig von $\hbar$. Im Limes $\hbar \to 0$ sieht (4) also folgendermassen aus:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} \;=\; \frac{1}{2m}\,|\nabla\varphi|^2 \;+\; V \tag{7}$$

Mit der klassischen Hamilton-Funktion

$$H(x,p) \;=\; \frac{p^2}{2m} \;+\; V(x) \;=\; \frac{p_1^2+p_2^2+p_3^2}{2m} \;+\; V(x_1,x_2,x_3)$$

können wir (7) dann auch so schreiben,

$$H(\,x\,,\,\nabla\varphi\,) \;+\; \frac{\partial\varphi}{\partial t} \;=\; 0 \tag{8}$$

und das ist genau die Hamilton-Jacobi-Gleichung, die wir in dem week12.pdf für die klassische Wirkung

$$S(x_0,x_t,t) \;=\; \int_0^t L(x_s,\dot{x}_s)\,ds$$

hergeleitet hatten. Lösungen von (7) sind also durch

$$\varphi(x,t) \;=\; S(x_0,x,t)$$

gegeben. Und in dem Theorem 3.3.1 in dem week12 hatten wir ebenfalls bewiesen, dass die Beziehung

$$\nabla_{x_t} S(x_0,x_t,t) \;=\; p_t$$

gilt. Hier haben wir kartesische Koordinaten $q_t = x_t$ so dass die verallgemeinerten Impulse $p_t = \partial L/\partial \dot{q}_t$ identisch sind mit den linearen Impulsen $m\,v_t = m\,\dot{x}_t$, also

$$\frac{\nabla\varphi}{m} \;=\; \frac{\nabla S}{m} \;=\; \frac{p}{m} \;=\; v \tag{9}$$

und die Gleichung (6) liest sich dann folgendermassen,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} \;+\; \mathrm{div}(\,\rho\, v\,) \;=\; 0 \quad .$$