Lösungen zum 12. Übungsblatt
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Aus der Lagrange-Funktion

$$L(x,\dot{x}) \;=\; \frac{m}{2}\big\{\,\dot{x}^2 \,-\omega^2 x^2\,\big\}$$

erhalten wir

$$p \;=\; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \;=\; m\dot{x}$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial x} \;=\; -\,m\omega^2 x$$

Damit bekommen wir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \;=\; m\ddot{x} + m\omega^2 x \;=\; 0$$

und die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x}_t + \omega^2 x_t \;=\; 0$$

Die allgemeine Lösung davon ist

$$x_t \;=\; x_0 \cos\omega t \,+\, \tfrac{v_0}{\omega}\,\sin\omega t$$

mit der Geschwindigkeit

$$\dot{x}_t \;=\; \omega\big\{-x_0\,\sin\omega t \,+\, \tfrac{v_0}{\omega}\,\cos\omega t\,\big\}$$

und $v_0 = \dot{x}_{t=0}$. Wenn wir das in die Lagrange-Funktion einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
L(x_t,\dot{x}_t) \;&=\; \tfrac{m}{2}\big\{\,\dot{x}_t^2 \,-\omega^2 x_t^2\,\big\}\\
&=\; \tfrac{m\omega^2}{2}\Big\{\,\big[-x_0\,\sin(\omega t) \,+\, \tfrac{v_0}{\omega}\,\cos(\omega t)\,\big]^2 \,-\, \big[\,x_0\,\cos(\omega t) \,+\, \tfrac{v_0}{\omega}\,\sin(\omega t)\,\big]^2\,\Big\}\\
&=\; \tfrac{m\omega^2}{2}\Big\{\,x_0^2\,[\sin^2(\omega t) - \cos^2(\omega t)] \,+\, \tfrac{v_0^2}{\omega^2}\,[\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)] \,-\, 4\,\tfrac{x_0 v_0}{\omega}\,\sin(\omega t)\cos(\omega t)\,\Big\}\\
&=\; \tfrac{m\omega^2}{2}\Big\{-x_0^2\,\cos(2\omega t) \,+\, \tfrac{v_0^2}{\omega^2}\,\cos(2\omega t) \,-\, 2\,\tfrac{x_0 v_0}{\omega}\,\sin(2\omega t)\,\Big\}
\end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned}
\tilde S(x_0,v_0,t) &= \textstyle\int_0^t L(x_s,\dot x_s)\,ds \\
&= \textstyle\int_0^t \frac{m\omega^2}{2}\Big\{ \big[-x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}\big]\cos(2\omega s) - 2\,\frac{x_0v_0}{\omega}\sin(2\omega s)\Big\}\,ds \\
&= \textstyle\frac{m\omega^2}{2}\Big\{ \big[-x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}\big]\frac{\sin(2\omega s)}{2\omega} + 2\,\frac{x_0v_0}{\omega}\frac{\cos(2\omega s)}{2\omega}\Big\}\Big|_0^t
\end{aligned}$$

oder

$$\tilde S(x_0,v_0,t) = \textstyle\frac{m\omega}{4}\Big\{ \big[-x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}\big]\sin(2\omega t) + 2\,\frac{x_0v_0}{\omega}\,[\cos(2\omega t)-1]\Big\}$$

Wir müssen das v_0 eliminieren: es ist

$$x_t = x_0\cos(\omega t) + \textstyle\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

Also,

$$\textstyle\frac{\omega}{\sin\omega t}\,[\,x_t - x_0\cos(\omega t)\,] = v_0 = v_0(x_0,x_t,t)$$

Damit bekommen wir die Wirkung

$$\begin{aligned}
S(x_0,x_t,t)/m &= \tilde S\big(\,x_0\,,\,v_0(x_0,x_t,t)\,,\,t\,\big)/m \\
&= \textstyle\frac{\omega}{4}\Big\{ \big[-x_0^2 + \frac{(x_t-x_0\cos\omega t)^2}{\sin^2\omega t}\big]\sin(2\omega t) + 2x_0\,\frac{x_t-x_0\cos\omega t}{\sin\omega t}\,[\cos(2\omega t)-1]\Big\} \\
&= \textstyle\frac{\omega}{4}\Big\{ \big[-x_0^2 + \frac{(x_t-x_0\cos\omega t)^2}{\sin^2\omega t}\big]\,2\sin\omega t\cos\omega t + 2x_0\,\frac{x_t-x_0\cos\omega t}{\sin\omega t}\,(-2)\sin^2\omega t\Big\} \\
&= \textstyle\frac{\omega\sin\omega t}{2}\Big\{ \big[-x_0^2 + \frac{(x_t-x_0\cos\omega t)^2}{\sin^2\omega t}\big]\cos\omega t - 2x_0\,(x_t-x_0\cos\omega t)\Big\} \\
&= \textstyle\frac{\omega\sin\omega t}{2}\Big\{ \big[x_0^2 + \frac{(x_t-x_0\cos\omega t)^2}{\sin^2\omega t}\big]\cos\omega t - 2x_0x_t\Big\} \\
&= \textstyle\frac{\omega\sin\omega t}{2}\Big\{ \big[\frac{x_0^2\sin^2\omega t + x_t^2 - 2x_0x_t\cos\omega t + x_0^2\cos^2\omega t}{\sin^2\omega t}\big]\cos\omega t - 2x_0x_t\Big\} \\
&= \textstyle\frac{\omega\sin\omega t}{2}\Big\{ \frac{x_0^2 + x_t^2 - 2x_0x_t\cos\omega t}{\sin^2\omega t}\cos\omega t - 2x_0x_t\Big\} \\
&= \textstyle\frac{\omega}{2\sin\omega t}\Big\{ [x_0^2 + x_t^2]\cos\omega t - 2x_0x_t\cos^2\omega t - 2x_0x_t\sin^2\omega t\Big\} \\
&= \textstyle\frac{\omega}{2\sin\omega t}\Big\{ [x_0^2 + x_t^2]\cos\omega t - 2x_0x_t\Big\}
\end{aligned}$$

Checken wir zunächst die Identität $p_t = \partial S/\partial x_t$. Wir haben

$$\textstyle\frac{\partial S}{\partial x_t} = \frac{m\omega}{2\sin\omega t}\big\{\,2x_t\cos\omega t - 2x_0\,\big\} = \frac{m\omega}{\sin\omega t}\,[\,x_t\cos\omega t - x_0\,]$$

und es ist

$$\begin{aligned} p_t &= m\dot{x}_t = m\omega\Big\{ -x_0 \sin(\omega t) + \tfrac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) \Big\} \\ &= m\omega\Big\{ -x_0 \sin(\omega t) + \tfrac{1}{\sin\omega t}\,[\, x_t - x_0 \cos(\omega t)\,] \cos(\omega t) \Big\} \\ &= \tfrac{m\omega}{\sin\omega t}\,\Big\{ -x_0 \sin^2(\omega t) + [\, x_t - x_0 \cos(\omega t)\,] \cos(\omega t) \Big\} \\ &= \tfrac{m\omega}{\sin\omega t}\,\Big\{ -x_0 + x_t \cos(\omega t) \Big\} = \tfrac{\partial S}{\partial x_t} \end{aligned}$$

das passt also. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial S/m}{\partial t} &= \tfrac{\partial}{\partial t}\tfrac{\omega}{2\sin\omega t}\Big\{ [x_0^2 + x_t^2] \cos\omega t - 2x_0 x_t \Big\} \\ &= -\tfrac{\omega^2\cos\omega t}{2\sin^2\omega t}\Big\{ [x_0^2 + x_t^2] \cos\omega t - 2x_0 x_t \Big\} - \tfrac{\omega^2}{2\sin\omega t}\,[x_0^2 + x_t^2] \sin\omega t \\ &= -\tfrac{\omega^2}{2\sin^2\omega t}\,[x_0^2 + x_t^2] \cos^2\omega t + \tfrac{\omega^2}{\sin^2\omega t}\, x_0 x_t \cos\omega t - \tfrac{\omega^2}{2}\,[x_0^2 + x_t^2] \\ &= -\tfrac{\omega^2}{2\sin^2\omega t}\,[x_0^2 \cos^2\omega t + x_t^2] + \tfrac{\omega^2}{\sin^2\omega t}\, x_0 x_t \cos\omega t - \tfrac{\omega^2}{2}\, x_0^2 \\ &= -\tfrac{\omega^2}{2}\,\Big\{ \tfrac{x_0^2\cos^2\omega t + x_t^2 - 2x_0 x_t \cos\omega t}{\sin^2\omega t} + x_0^2 \Big\} \\ &= -\tfrac{\omega^2}{2}\,\Big\{ \tfrac{(x_0\cos\omega t - x_t)^2}{\sin^2\omega t} + x_0^2 \Big\} \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{m\omega^2}{2}\,\Big\{ \frac{(x_0\cos\omega t - x_t)^2}{\sin^2\omega t} + x_0^2 \Big\}$$

Die Hamilton-Funktion ist eine Konstante der Bewegung und ist gegeben durch

$$H(x_t, p_t) = \frac{p_t^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\, x_t^2 = \frac{m}{2}\Big\{ \dot{x}_t^2 + \omega^2 x_t^2 \Big\} = \frac{m}{2}\Big\{ \dot{x}_0^2 + \omega^2 x_0^2 \Big\}$$

Mit

$$\frac{\omega}{\sin\omega t}\,[\, x_t - x_0 \cos(\omega t)\,] = v_0 = v_0(x_0, x_t, t)$$

bekommen wir dann

$$H = \frac{m}{2}\,\Big\{ v_0^2 + \omega^2 x_0^2 \Big\} = \frac{m\omega^2}{2\sin^2\omega t}\,[\, x_t - x_0 \cos(\omega t)\,]^2 + \frac{m\omega^2}{2}\, x_0^2$$

also

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

das passt auch.