Lösungen zum 1. Übungsblatt
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Zunächst mal gelten die folgenden allgemeinen Tatsachen:

(i) Eine homogene ('auf der rechten Seite steht eine Null') lineare Differentialgleichung (DGL) 2. Ordnung hat zwei linear unabhängige Lösungen, also in der allgemeinen Lösung gibt es zwei Konstanten.

(ii) Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DGL 2. Ordnung ist gegeben durch die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung plus eine spezielle (oder auch 'partikuläre') Lösung der inhomogenen Gleichung.

Damit können wir die Aufgabe jetzt lösen:

a) Offensichtlich sind $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$ Lösungen von

$$\ddot{x}_t + \omega^2 x_t = 0 \tag{1}$$

Also lautet die allgemeine Lösung von (1):

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned}$$

bekommen wir

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \tfrac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \tag{2}$$

als die eindeutige Lösung von (1).

b) Wir machen den komplexen Ansatz

$$x(t) = e^{i\lambda t}$$

mit einem komplexen $\lambda \in \mathbb{C}$ und bekommen

$$(i\lambda)^2 + i\lambda\gamma + \omega^2 = 0$$

oder, mit $\gamma = 2\mu$,

$$\begin{aligned} & -\lambda^2 + 2i\lambda\mu + \omega^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda^2 - 2i\lambda\mu - \omega^2 = 0 \end{aligned}$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\lambda_\pm &= i\mu \pm \sqrt{(i\mu)^2 + \omega^2} \\ &= i\mu \pm \sqrt{\omega^2 - \mu^2}\end{aligned} \tag{3}$$

Wir betrachten die Fälle $\mu < \omega$, $\mu = \omega$ und $\mu > \omega$.

Fall 1: $\mu < \omega$, schwache Dämpfung: Gleichung (3) hat die Lösungen

$$\lambda_\pm = \pm\,\omega_\mu + i\mu \tag{4}$$

mit einer reellen Frequenz

$$\omega_\mu := \sqrt{\omega^2 - \mu^2} \in \mathbb{R}$$

Damit bekommen wir die komplexen Lösungen

$$x_\pm(t) = e^{i\lambda_\pm t} = e^{-\mu t}\, e^{\pm i\omega_\mu t} \tag{5}$$

Wegen

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_t + \gamma\,\dot{x}_t + \omega^2 x_t = 0 \qquad (6)\\ \Rightarrow\quad & \mathrm{Re}\big[\,\ddot{x}_t + \gamma\,\dot{x}_t + \omega^2 x_t\,\big] = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \tfrac{d^2}{dt^2}\mathrm{Re}[x_t] + \gamma\,\tfrac{d}{dt}\mathrm{Re}[x_t] + \omega^2\mathrm{Re}[x_t] = 0\end{aligned}$$

sind auch Realteil und Imaginärteil der Lösung (5) Lösungen der DGL (6). Damit ist die allgemeine reelle Lösung von (6) gegeben durch

$$x(t) = e^{-\mu t}\big[\,a\,\cos\omega_\mu t + b\,\sin\omega_\mu t\,\big] \tag{7}$$

Wir haben

$$\dot{x}(t) = -\,\mu\, e^{-\mu t}\big[\,a\,\cos\omega_\mu t + b\,\sin\omega_\mu t\,\big] + e^{-\mu t}\big[\,-a\omega_\mu\,\sin\omega_\mu t + b\omega_\mu\,\cos\omega_\mu t\,\big]$$

und damit

$$\begin{aligned} x(0) &= a \overset{!}{=} x_0 \\ \dot{x}(0) &= -\mu\, a + b\,\omega_\mu \overset{!}{=} \dot{x}_0\end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned} a &= x_0 \\ b &= \tfrac{\dot{x}_0 + \mu x_0}{\omega_\mu}\end{aligned}$$

und damit

$$x(t) = e^{-\mu t}\left[\,x_0\,\cos\omega_\mu t + \tfrac{\dot{x}_0 + \mu x_0}{\omega_\mu}\,\sin\omega_\mu t\,\right] \tag{8}$$

Fall 2: $\mu > \omega$, starke Dämpfung: Gleichung (3) hat die Lösungen

$$\lambda_\pm \;=\; i\mu \,\pm\, i\sqrt{\mu^2-\omega^2} \;=:\; i\,\kappa_\pm \tag{9}$$

mit den reellen und positiven Abklingfaktoren

$$\kappa_\pm \;:=\; \mu \,\pm\, \sqrt{\mu^2-\omega^2} \;>\; 0$$

Damit erhalten wir die allgemeine reelle Lösung

$$x(t) \;=\; a_+\,e^{-\kappa_+ t} \,+\, a_-\,e^{-\kappa_- t} \tag{10}$$

Wegen

$$\begin{aligned} x(0) \;&=\; a_+ + a_- \;\stackrel{!}{=}\; x_0 \\ \dot x(0) \;&=\; -\kappa_+ a_+ - \kappa_- a_- \;\stackrel{!}{=}\; \dot x_0 \end{aligned}$$

erhalten wir, wenn wir die erste Gleichung mit κ_+ oder κ_- multiplizieren und auf die zweite draufaddieren,

$$\begin{aligned} \kappa_+ a_- \,-\, \kappa_- a_- \;&=\; \kappa_+ x_0 \,+\, \dot x_0 \\ \kappa_- a_+ \,-\, \kappa_+ a_+ \;&=\; \kappa_- x_0 \,+\, \dot x_0 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} a_+ \;&=\; -\tfrac{\kappa_- x_0 + \dot x_0}{\kappa_+ - \kappa_-} \\ a_- \;&=\; +\tfrac{\kappa_+ x_0 + \dot x_0}{\kappa_+ - \kappa_-} \end{aligned}$$

Das können wir dann in(10) einsetzen und bekommen die Lösung zu den vorgegebenen Anfangsbedingungen.

Fall 3: $\mu = \omega$, aperiodischer Grenzfall: Gleichung (3) hat nur eine Lösung,

$$\lambda \;=\; i\,\mu \,\pm 0 \;=\; i\,\mu$$

und wir haben zunächst mal nur eine Lösung

$$x(t) \;=\; e^{-\mu t}$$

In solchen Situationen bekommt man mit

$$x(t) \;=\; t\,e^{-\mu t}$$

eine weitere Lösung, rechnen wir das eben nach: wir haben

$$\begin{aligned} \dot x(t) \;&=\; e^{-\mu t} \,-\, \mu\,t\,e^{-\mu t} \;=\; (1-\mu t)\,e^{-\mu t} \\ \ddot x(t) \;&=\; (-\mu)\,e^{-\mu t} \,-\, \mu(1-\mu t)\,e^{-\mu t} \;=\; (\mu^2 t \,-\, 2\mu)\,e^{-\mu t} \end{aligned}$$

und bekommen damit

$$\begin{aligned} \ddot x_t \,+\, \gamma\,\dot x_t \,+\, \omega^2 x_t \;&=\; \ddot x_t \,+\, 2\mu\,\dot x_t \,+\, \mu^2 x_t \\ &=\; \Big\{\,(\mu^2 t \,-\, 2\mu) \,+\, 2\mu(1-\mu t) \,+\, \mu^2 t\,\Big\} e^{-\mu t} \\ &=\; 0 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet dann also

$$x(t) \;=\; (a+bt)\,e^{-\mu t}$$

mit

$$\dot{x}(t) \;=\; \big[\, b \,-\, \mu(a+bt) \,\big]\, e^{-\mu t}$$

Die Anfangsbedingungen liefern dann

$$a \;=\; x_0$$

und

$$\begin{aligned} b-\mu a \;=\; b-\mu x_0 \;&=\; \dot{x}_0 \\ b \;&=\; \dot{x}_0 + \mu x_0 \end{aligned}$$

also

$$x(t) \;=\; \big[\, x_0 \,+\, (\dot{x}_0 + \mu x_0)t \,\big]\, e^{-\mu t} \tag{11}$$

c) Wir haben jetzt eine inhomogene DGL,

$$\ddot{x}_t \,+\, \gamma\,\dot{x}_t \,+\, \omega^2\,x_t \;=\; a_0\,\sin(\omega_0 t) \tag{12}$$

und müssen eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung finden. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$\ddot{x}_t \,+\, \gamma\,\dot{x}_t \,+\, \omega^2\,x_t \;=\; 0$$

haben wir bereits in Teil (b) bestimmt. Wir betrachten die komplexe Gleichung

$$\ddot{z}_t \,+\, \gamma\,\dot{z}_t \,+\, \omega^2\,z_t \;=\; a_0\,e^{i\omega_0 t} \tag{13}$$

Wenn wir ein $z(t)$ haben, welches (13) erfüllt, dann bekommen wir mit einem reellen a_0

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\big[\,\ddot{z}_t \,+\, \gamma\,\dot{z}_t \,+\, \omega^2\,z_t\,\big] \;&=\; \mathrm{Im}\big[\,a_0\,e^{i\omega_0 t}\,\big] \\ \Leftrightarrow \qquad \tfrac{d^2}{dt^2}\mathrm{Im}[z_t] \,+\, \gamma\,\tfrac{d}{dt}\mathrm{Im}[z_t] \,+\, \omega^2\mathrm{Im}[z_t] \;&=\; a_0\,\sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

also dann ist

$$x(t) \;:=\; \mathrm{Im}[z_t]$$

eine Lösung von (12). Um eine Lösung von (13) zu finden, machen wir den Ansatz

$$z(t) \;=\; a\,e^{i\omega_0 t}$$

und bekommen

$$a\big\{\,-\omega_0^2 \,+\, i\omega_0\gamma \,+\, \omega^2\,\big\}\,e^{i\omega_0 t} \;=\; a_0\,e^{i\omega_0 t}$$

oder

$$a \;=\; \frac{a_0}{\omega^2-\omega_0^2 \,+\, i\gamma\omega_0} \;=\; a_0\,\frac{\omega^2-\omega_0^2 \,-\, i\gamma\omega_0}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 \,+\, (\gamma\omega_0)^2}$$

Also erhalten wir die komplexe Lösung

$$z(t) \;=\; a_0\,\frac{\omega^2-\omega_0^2 \,-\, i\gamma\omega_0}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 \,+\, (\gamma\omega_0)^2}\,\big[\cos(\omega_0 t) \,+\, i\,\sin(\omega_0 t)\big]$$

und müssen davon den Imaginärteil bestimmen: eine spezielle Lösung der inhomogenen, reellen DGL (12) ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} x_{\text{inhom}}(t) \;&=\; \mathrm{Im}[z_t] \\ &=\; \frac{a_0}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 \,+\, (\gamma\omega_0)^2}\,\Big\{\,(\omega^2-\omega_0^2)\sin(\omega_0 t) \;-\; \gamma\omega_0\,\cos(\omega_0 t)\,\Big\} \end{aligned} \tag{14}$$

und die allgemeine Lösung ist dann gegeben durch

$$x(t) \;=\; x_{\text{allg,hom}}(t) \,+\, x_{\text{spez,inhom}}(t) \tag{15}$$

wobei $x_{\text{allg,hom}}(t)$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist, diese enthält zwei Konstanten, etwa ein c_1 und ein c_2, das $x_{\text{spez,inhom}}(t) = x_{\text{inhom}}(t)$ ist die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung aus (14), und die beiden Konstanten c_1 und c_2 müssen dann wieder aus den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(0) \;&\overset{!}{=}\; x_0 \\ \dot{x}(0) \;&\overset{!}{=}\; \dot{x}_0 \end{aligned}$$

bestimmt werden. Wir wollen das an dieser Stelle nur für den Fall ohne Dämpfung machen, also nur für $\gamma = 0$. In dem Fall haben wir

$$\begin{aligned} x_{\text{spez,inhom}}(t) \;&=\; \frac{a_0}{\omega^2-\omega_0^2}\,\sin(\omega_0 t) \\ x_{\text{allg,hom}}(t) \;&=\; c_1\,\cos\omega t \,+\, c_2\,\sin\omega t \end{aligned}$$

also

$$x(t) \;=\; c_1\,\cos\omega t \,+\, c_2\,\sin\omega t \,+\, \frac{a_0}{\omega^2-\omega_0^2}\,\sin(\omega_0 t) \tag{16}$$

so dass

$$x(0) \;=\; c_1 \;=\; x_0$$

und

$$\dot{x}(0) \;=\; c_2\,\omega \,+\, \frac{a_0\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2} \;\overset{!}{=}\; \dot{x}_0$$

Also,

$$c_2 \;=\; \frac{\dot{x}_0}{\omega} \,-\, a_0\,\frac{\omega_0}{\omega}\,\frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}$$

und damit bekommen wir schliesslich

$$x(t) \;=\; x_0\,\cos\omega t \;+\; \frac{\dot{x}_0}{\omega}\,\sin\omega t \;+\; \frac{a_0}{\omega^2-\omega_0^2}\,\Big\{\,-\,\frac{\omega_0}{\omega}\,\sin(\omega t) \,+\, \sin(\omega_0 t)\,\Big\} \tag{17}$$

für den Fall $\gamma = 0$.