Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2022/23

9. Übungsblatt zur Vorlesung Ökonometrie

Aufgabe 1: Wir betrachten das Setting von Linearer Regression als statistisches Problem: Gegeben seinen die Vektoren oder Regressoren $\vec{x}_0,\ \vec{x}_1,\ \cdots\ \vec{x}_p$ mit der Matrix der Regressoren

$$X \;=\; \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{x}_0 & \vec{x}_1 & \cdots & \vec{x}_p \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

und es sei

$$\begin{aligned} \vec{y} \;&=\; \beta_0\,\vec{x}_0 \;+\; \beta_1\,\vec{x}_1 \;+\; \cdots \;+\; \beta_p\,\vec{x}_p \;+\; \vec{\varepsilon} \\ &=\; X\vec{\beta} \;+\; \vec{\varepsilon} \end{aligned}$$

wobei die $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ normalverteilte, unabhängige Zufallszahlen mit Mittelwert 0 und Standardabweichung σ sind. Zeigen Sie:

a) Der Maximum-Lilelihood-Schätzer für den j-ten Regressionskoeffizienten

$$\hat{\beta}_j(X,\vec{y}) \;=\; [\,(X^TX)^{-1}X^T\vec{y}\,]_j$$

ist normalverteilt mit Mittelwert β_j und Varianz $\sigma^2(X^TX)^{-1}_{j,j}$. (Erwartungswert und Varianz hatten wir in der VL schon berechnet, hier müssen Sie kaum noch was machen)

b) Der erwartungstreue Schätzer für das σ^2, das war das

$$\widehat{s^2}(X,\vec{y}) \;=\; \tfrac{1}{n-(p+1)}\,\big[\,P_{X^\perp}\vec{y}\,\big]^2$$

hat die folgende Verteilung: $[n-(p+1)]\,\widehat{s^2}/\sigma^2$ ist χ^2-verteilt mit $n-(p+1)$ Freiheitsgraden, ist also $\chi^2_{n-(p+1)}$-verteilt. Wie lautet dann die Verteilung von dem $\widehat{s^2}$?

Aufgabe 2: Überprüfen Sie die Aussagen aus Aufgabe 1 durch eine geeignete R-Simulation. Wählen Sie dazu etwa

$$\vec{x} \;=\; (-5,-4,-3,-2,-1,\ 0\ ,+1,+2,+3,+4,+5)$$

und betrachten Sie das Regressionsmodell

$$y_i \;=\; \beta_0 \;+\; \beta_1\,x_i \;+\; \beta_2\,x_i^2 \;+\; \varepsilon_i \tag{1}$$

mit

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -6 \\ \beta_1 &= -1 \\ \beta_2 &= 0.5 \end{aligned}$$

und die $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n=11})$ normalverteilte, unabhängige Zufallszahlen mit Mittelwert 0 und Standardabweichung $\sigma = 2$. Ein Zufallsexperiment bestehe aus dem Generieren der y_i's gemäss Gleichung (1) und dem Durchführen einer linearen Regression. Machen Sie dann $N = 10000$ solche Zufallsexperimente und versuchen Sie, etwa die folgenden Bilder zu reproduzieren: